

Eine nichtlineare Fredholm-Alternative

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung
der Philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der Universität Zürich

von
BERNHARD H. RUF
von Buch am Irchel ZH

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. P. Hess

Zürich 1980
Zentralstelle der Studentenschaft

Eine nichtlineare Fredholm-Alternative

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung
der Philosophischen Doktorwürde

vorgelegt der
Philosophischen Fakultät II
der Universität Zürich



von
BERNHARD H. RUF
von Buch am Irchel ZH

Begutachtet von Herrn Prof. Dr. P. Hess

Zürich 1980
Zentralstelle der Studentenschaft

Erscheint unter dem Titel "On nonlinear elliptic problems with jumping nonlinearities" in den Annali di Matematica Pura ed Applicata, Ser. IV, 1980.



Inhalt

Einleitung	1
1. Das Problem	9
2. Existenz der gespaltenen Eigenwerte	12
3. Eindeutigkeit der gespaltenen Eigenwerte	28
4. Die inhomogene Gleichung	34
5. Nichtlineare Fredholmalternative	51
6. Die gewöhnliche Differentialgleichung	53
Literatur	71



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Einleitung

Wir beschäftigen uns im folgenden mit nichtlinearen elliptischen Randwertproblemen der Form

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f(u) + h & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega . \end{cases}$$

Dabei sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^N$ mit glattem Rand $\partial\Omega$. Für die stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gelte

$\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(s)}{s} \neq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s}$, wobei wir annehmen, dass die beiden Limites in $\mathbb{R}$ existieren. Eine solche Nichtlinearität nennen wir gemäss Fučík [3] eine springende Nichtlinearität. Besonders interessant ist nun der Fall, dass f einen Eigenwert λ_k der linearen Eigenwertgleichung

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

überspringt. Seien $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$ die Eigenwerte von (2), wiederholt entsprechend ihrer Multiplizität, und es gelte z.B.

$$\lambda_- := \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{f(s)}{s} < \lambda_k < \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s} =: \lambda_+ .$$

Die grundlegende Arbeit für solche Probleme stammt von Ambrosetti-Prodi [2], die das folgende Resultat bewiesen haben:

f sei von der Klasse C^2 und erfülle

$$(a) \quad f(0) = 0, \quad (b) \quad f'(t) > 0, \quad \forall t,$$

$$(c) \quad 0 < \lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) < \lambda_1 < \lim_{t \rightarrow \infty} f'(t) < \lambda_2 .$$

Dann existiert in $C(\bar{\Omega})$ eine abgeschlossene, zusammenhängende C^1 -Mannigfaltigkeit M der Kodimension 1, sodass $C(\bar{\Omega}) \setminus M$ aus genau zwei Komponenten M_1 und M_2 besteht mit der Eigenschaft:

- (i) Für $h \in M_1$ existiert keine Lösung von (1).
- (ii) Für $h \in M_2$ existieren genau zwei Lösungen von (1).
- (iii) Für $h \in M$ existiert genau eine Lösung von (1).

In unserer Arbeit betrachten wir den Fall, dass f einen höheren Eigenwert überspringt. Bei der Untersuchung dieses Problems stellte es sich heraus, dass es natürlich ist, die Gleichung (1) in der folgenden Form zu betrachten:

$$(3) \quad \begin{cases} (-\Delta - \lambda)u + g(u) = h & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei $\lambda := \lambda_+$, $g(s) := \lambda \cdot s - f(s)$.

Da gilt $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{s} = 0$ und $\lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{g(s)}{s} = \lambda_+ - \lambda_- =: \gamma$,

können wir die Funktion g nochmals zerlegen durch die

Definition: $g(s) =: -\gamma \cdot s^- + b(s)$, wobei

$$-\gamma \cdot s^- = \begin{cases} \gamma \cdot s & , \quad s < 0 \\ 0 & , \quad s \geq 0 \end{cases}, \quad \text{und} \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{|b(s)|}{|s|} = 0.$$

Wir setzen im folgenden $\gamma > 0$ voraus.

Wir werden zuerst das Problem

$$(4) \quad \begin{cases} (-\Delta - \lambda)u - \gamma u^- = h & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

studieren und es dann später mit einer Funktion der Form

b stören. Falls man nun einmal annimmt, dass das Resultat von Ambrosetti-Prodi für (4) auch gilt (was wir auch zeigen werden), so kann man an dieser Gleichung die folgende interessante Beobachtung machen. Wenn wir in (4) $h = 0$ setzen und $\gamma > 0$ fest halten, so erhalten wir ein positiv homogenes "Eigenwertproblem"

$$(5) \quad \begin{cases} -\Delta u - \gamma u^- = \lambda u & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

das die "Eigenwerte" λ_1 und $\lambda_1 + \gamma$ besitzt. Da nämlich die zu λ_1 gehörige Eigenfunktion e_1 in ganz Ω dasselbe Vorzeichen hat und somit positiv gewählt werden kann, ist $e_1^- = 0$ und $(-e_1)^- = e_1$ und somit

$$-\Delta e_1 - \gamma e_1^- = \lambda_1 e_1, \quad -\Delta(-e_1) - \gamma(-e_1)^- = (\lambda_1 + \gamma)(-e_1).$$

Die asymptotischen Bedingungen von Ambrosetti-Prodi für (4) lauten

$$0 < \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\lambda s + \gamma s^-}{s} < \lambda_1 < \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\lambda s + \gamma s^-}{s} < \lambda_2,$$

$$\text{also: } 0 < \lambda - \gamma < \lambda_1 < \lambda < \lambda_2.$$

Für festes $\gamma > 0$ ergibt sich für λ die Bedingung

$$\lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \gamma.$$

Man sieht also, dass die beiden "Eigenwerte" λ_1 und $\lambda_1 + \gamma$ den Bereich der λ 's begrenzen, für den das Ambrosetti-Prodi Resultat gilt.

Für die höheren (einfachen) Eigenwerte gilt nun in analoger Weise:

Sei $0 < \gamma < \min\{\lambda_k - \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1} - \lambda_k\}$, $k \geq 2$.

Dann gibt es genau zwei "Eigenwerte" $\lambda_k^1, \lambda_k^2 \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ und eindeutig bestimmte "Eigenfunktionen" v^1, v^2 , sodass

$$(6) \quad -\Delta v^1 - \gamma(v^1)^- = \lambda_k^1 v^1, \quad$$

$$(7) \quad -\Delta v^2 - \gamma(v^2)^- = \lambda_k^2 v^2.$$

Wir nennen das Paar $(\lambda_k^1, \lambda_k^2)$ den k -ten gespaltenen Eigenwert von $-\Delta - \gamma(\cdot)^-$.

Da die k -te Eigenfunktion e_k für $k \geq 2$ das Vorzeichen wechselt, sind die Werte λ_k^1 und λ_k^2 nicht so einfach zu bestimmen wie für $k = 1$. Ferner ist es auch möglich, dass $\lambda_k^1 = \lambda_k^2$ gilt (vgl. Paragraph 6).

Mit Hilfe dieser Tatsachen kann man nun das Ambrosetti-Prodi Resultat auf höhere Eigenwerte übertragen. Es gilt der folgende

Satz. Sei

$$(8) \quad 0 < \gamma < \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_1, & k = 1 \\ \min\{\lambda_k - \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1} - \lambda_k\}, & k \geq 2. \end{cases}$$

Dann gilt für $\lambda \in]\lambda_k^1, \lambda_k^2[$: Für jedes $h_k \in \text{coKer}(-\Delta - \lambda_k)$ existieren Konstanten $T(h_k), T_1(h_k)$, sodass das Problem

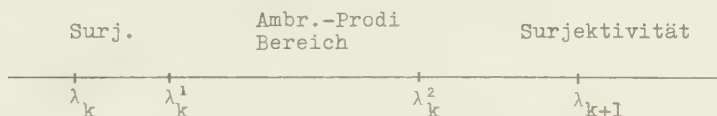
$$(3) \quad \begin{cases} (-\Delta - \lambda)u + g(u) = h & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

für $h = t e_k + h_k$ ($e_k \in \text{Ker}(-\Delta - \lambda_k)$, $\|e_k\| = 1$)

- mindestens zwei Lösungen hat, falls $t < T(h_k)$
- keine Lösung hat, falls $t \geq T_1(h_k)$.

Für $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[\setminus [\lambda_k^1, \lambda_k^2]$ hat (3) für jedes h mindestens eine Lösung.

Unser Resultat charakterisiert also die Grenzen, innerhalb derer ein Ambrosetti-Prodi Resultat gilt, als eindeutig bestimmten, gespaltenen Eigenwert, wobei wie erwähnt dieser Ambrosetti-Prodi Bereich auch leer sein kann. Man hat also die folgende Situation:



Diese Skizze legt es nahe, dass man das Resultat auch als nichtlineare Fredholm-Alternative auffassen kann:

Es gelte (8). Falls das (positiv-) homogene Eigenwertproblem (5) nur die triviale Lösung besitzt, dann gilt für das inhomogene Problem (4) (und auch für das durch b gestörte Problem (3)):

entweder existiert für alle h mindestens eine Lösung

(falls nämlich $\lambda \notin [\lambda_k^1, \lambda_k^2]$),

oder es existieren für gewisse h mindestens zwei Lösungen (und für andere h keine Lösung)

(falls nämlich $\lambda \in]\lambda_k^1, \lambda_k^2[$).

Anschaulich gesprochen wird also durch die Störung $-\gamma(\cdot)^-$ der Eigenwert λ_k in den gespaltenen Eigenwert $(\lambda_k^1, \lambda_k^2)$ übergeführt. (Für $\gamma \rightarrow 0$ gilt tatsächlich $\lambda_k^1 \rightarrow \lambda_k$, $\lambda_k^2 \rightarrow \lambda_k$.)

Falls das System in Resonanz ist bezüglich eines gespaltenen Eigenwertes, muss man unterscheiden, ob $\lambda_k^1 = \lambda_k^2$ oder $\lambda_k^1 \neq \lambda_k^2$. Im ersten Fall hat man ein ähnliches Resultat wie im linearen Fall: Für jedes $h_k \in \text{coKer}(-\Delta - \lambda_k)$ existiert ein nichtleeres Intervall $I(h_k)$, sodass für $t \in I(h_k)$ mindestens eine Lösung existiert von

$$(9) \quad (-\Delta - \lambda_k^1)u + g(u) = h_k + te_k.$$

Ein völlig anderes Verhalten finden wir im Fall $\lambda_k^1 \neq \lambda_k^2$ (d.h. wenn der Eigenwert $(\lambda_k^1, \lambda_k^2)$ tatsächlich gespalten ist). In diesem Fall ist das Problem immer noch für eine "Halbgerade" in $\text{Ker}(-\Delta - \lambda_k)$ lösbar. Dies muss allerdings nicht überraschen, da sich die Gleichung ja nur bezüglich der einen "Hälfte" des gespaltenen Eigenwertes in Resonanz befindet. Genauer gilt (z.B. für $\lambda = \lambda_k^1$): Für jedes $h_k \in \text{coKer}(-\Delta - \lambda_k)$ existiert eine Konstante $T(h_k)$, so dass für $t < T(h_k)$ mindestens eine Lösung existiert von (9).

Wir weisen noch darauf hin, dass wir für $k = 1$ nicht ganz das Resultat von Ambrosetti-Prodi erhalten. Wir müssen $\gamma < \lambda_2 - \lambda_1$ fordern, damit $\lambda_1^2 = \lambda_1 + \gamma < \lambda_2$. In [2] ist $0 < \gamma < \lambda_2$ erlaubt, wobei allerdings $\gamma < \lambda$ gelten muss. Diese Bedingung an λ ist nun in unserer Betrachtungsweise überflüssig. Das Resultat müsste nämlich für alle λ im Ambrosetti-Prodi Bereich gelten, d.h. für alle λ mit $\lambda_1^1 = \lambda_1 < \lambda < \lambda_1 + \gamma = \lambda_1^2$. Dies ist tatsächlich der Fall, und zwar sogar für beliebige $\gamma > 0$. Zum Beweis dieser Tatsache benützt man wesentlich, dass

$e_1 > 0$ in Ω . Da jedoch dieses Resultat von anderen Autoren (vgl. Kazdan-Warner [6], Hess [4]) in diesem Sinne erweitert worden ist, werden wir nicht näher darauf eingehen.

Wir erwähnen die Arbeit [7] von E. Podolak, in der ebenfalls nichtlineare Störungen der betrachteten Art um höhere Eigenwerte bei partiellen Differentialgleichungen behandelt werden. E. Podolak beweist das folgende Resultat (in unserer Notation): Die Gleichung

$$(10) \quad (-\Delta - \lambda)u - \gamma u^+ = h, \quad 0 < \lambda - \lambda_k \leq \epsilon_1, \quad 0 < \gamma \leq \epsilon_2,$$

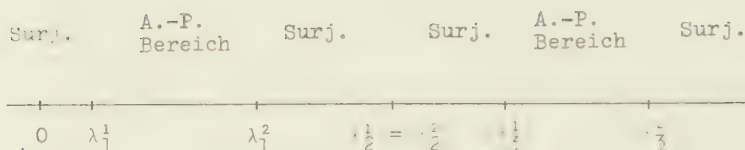
hat für gewisse h mindestens zwei Lösungen, falls ϵ_1, ϵ_2 genügend klein sind, und falls gilt $\int_{\Omega} |e_k| e_k \, dx \neq 0$.

Diese Bedingungen garantieren also, dass man sich im Ambrosetti-Prodi Bereich befindet. Wir werden tatsächlich zeigen, dass für $\int_{\Omega} |e_k| e_k \, dx \neq 0$ und ϵ_1, ϵ_2 genügend klein gilt $\lambda_k^1 \neq \lambda_k^2$, d.h. der Ambrosetti-Prodi Bereich ist nicht leer.

Für die gewöhnliche Differentialgleichung lässt sich unter Verwendung von Ergebnissen von Fučík das Spektrum der gespaltenen Eigenwerte vollständig bestimmen. Man erhält

$$0 < \lambda_1^1 < \lambda_1^2 < \lambda_2^1 = \lambda_2^2 < \lambda_3^1 < \lambda_3^2 < \lambda_4^1 = \lambda_4^2 < \dots$$

Mit Hilfe des Leray-Schauder'schen Abbildungsgrades erhält man dann für beliebige $\gamma > 0$:



Im Ambrosetti-Prodi Bereich hat man eine Modifikation des Resultats für kleine γ 's. Wir bezeichnen wieder mit v_k^1 , v_k^2 die zum gespaltenen Eigenwert $(\lambda_k^1, \lambda_k^2)$ gehörenden Eigenfunktionen. Dann gilt:

Für alle h , die orthogonal auf v_k^1 stehen, existiert eine Konstante $T(h)$, sodass für $t < T(h)$ mindestens eine Lösung existiert von

$$(A - \lambda)u - \gamma u^- + b(u) = t \cdot v_k^1 + h.$$

Für alle k , die orthogonal auf v_k^2 stehen, existiert eine Konstante $S(k)$, sodass für $s > S(k)$ mindestens eine Lösung existiert von

$$(A - \lambda)y - \gamma y^- + b(y) = s \cdot v_k^2 + k.$$

Falls eine Funktion f sowohl eine Darstellung

$$f = t \cdot v_k^1 + h \quad \text{als auch} \quad f = s \cdot v_k^2 + k$$

zulässt, und falls für beide Darstellungen Lösungen existieren (wie das für kleine γ 's der Fall ist), so sind diese Lösungen verschieden.

Um dieses Resultat für beliebige $\gamma > 0$ auf partielle Differentialgleichungen übertragen zu können, müsste man das Spektrum des Operators $A - \gamma(\)^-$ kennen. Dieses Problem ist noch offen.

1. Das Problem

Sei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) mit glattem Rand $\partial\Omega$. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ und $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ bezeichnen Multi-Indices mit $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$ ($i = 1, \dots, N$) und $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$. $L^2(\Omega)$ ist der Hilbertraum der quadratisch integrierbaren, reellwertigen Funktionen auf Ω , und $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$ sind die üblichen Sobolev-Räume für $k = 0, 1, 2, \dots$.

$$\text{Sei} \quad A = \sum_{|\alpha| \leq m, |\beta| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta)$$

ein gleichmässig elliptischer, formal selbstadjungierter linearer Differentialausdruck mit reellwertigen Koeffizienten-Funktionen $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} \in C^m(\overline{\Omega})$.

Ferner sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die die folgenden asymptotischen Bedingungen erfüllt:

$$(1.1) \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{g(s)}{s} = 0, \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{g(s)}{s} = \gamma > 0.$$

Wir beschäftigen uns mit der Lösbarkeit des nichtlinearen Dirichletproblems

$$(1.2) \quad \begin{cases} (Au)(x) - \lambda u(x) + g(u(x)) = h(x) & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ und eine gegebene reellwertige, in Ω definierte Funktion h .

Sei A der durch A in $L^2(\Omega)$ induzierte lineare Operator mit Definitionsbereich $D(A) = H_0^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega)$. A ist dann selbstadjungiert und hat eine kompakte Resolvente. Das Spektrum von A besteht aus einer Folge von Eigenwerten

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \text{ endlicher Vielfachheit.}$$

Wir benützen die folgenden Bezeichnungen:

$H = L^2(\Omega)$. e_k sei die normierte Eigenfunktion zum k -ten Eigenwert λ_k von A : $Ae_k = \lambda_k e_k$, $\|e_k\| = 1$. Es sei $E_k := \text{span}\{e_k\}$, $E_{1,k} := \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. Dann kann H in die direkten Summen

$$H = E_k \oplus H_k \quad \text{bzw.} \quad H = E_{1,k} \oplus H_{1,k}$$

zerlegt werden. P_k , $P_{1,k}$ sind die Orthogonal-Projektoren auf H_k , $H_{1,k}$, Q_k , $Q_{1,k}$ diejenigen auf E_k , $E_{1,k}$.

Der Funktion g kann man in natürlicher Weise den nicht-linearen Nemytskii-Operator $G: H \rightarrow H$ zuordnen, indem man diesen punktweise definiert durch $(Gu)(x) := g(u(x))$, für f.a. $x \in \Omega$. In Paragraph 2 und 3 ist $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von der speziellen Form

$$g(s) := \begin{cases} \gamma \cdot s & , \quad s < 0 \\ 0 & , \quad s \geq 0 \end{cases}$$

Der zugehörige Nemytskii-Operator existiert dann einfach durch Multiplikation von γ mit $-u^- := -\max\{-u, 0\}$: $G(u) = -\gamma \cdot u^-$. Der Anschaulichkeit halber werden wir meistens die Bezeichnung $-\gamma u^-$ verwenden.

1.1. Definition. Sei $e_k \in E_k$, $\|e_k\| = 1$.

Das Paar $(\lambda_k^1, \lambda_k^2) \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}] \times [\lambda_k, \lambda_{k+1}]$ heisst k -ter gespaltener Eigenwert von $A - \gamma(\)^-$, falls

$$(1.3) \quad A(e_k + u) - \gamma(e_k + u)^- = \lambda_k^1(e_k + u), \quad \text{für ein } u \in H_k$$

$$(1.4) \quad A(-e_k + y) - \gamma(-e_k + y)^- = \lambda_k^2(-e_k + y), \quad \text{für ein } y \in H_k$$

In Paragraph 2 zeigen wir, dass für $0 < \gamma < \min\{\lambda_k - \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1} - \lambda_k\}$ ein gespaltener Eigenwert existiert. Aus Lemma 2.1 folgt, dass Definition 1.1 sinnvoll ist, d.h. dass man

zu λ_k^1, λ_k^2 gehörende "Eigenfunktionen" in der Form $e_k + u$ resp. $-e_k + y$, $u, y \in H_k$, ansetzen muss.

In Paragraph 3 beweisen wir unter den gleichen Voraussetzungen die Eindeutigkeit der gespaltenen Eigenwerte und der zugehörigen Eigenfunktionen.

In Paragraph 4 charakterisieren wir mit Hilfe der Eigenschaften der gespaltenen Eigenwerte die Menge der Funktionen $h \in H$, für welche die Gleichung (1.2) eine Lösung besitzt.

In Paragraph 5 formulieren wir das Resultat als nicht-lineare Fredholmalternative.

In Paragraph 6 schliesslich behandeln wir die entsprechende gewöhnliche Differentialgleichung.

2. Existenz der gespaltenen Eigenwerte

Wir wollen zeigen, dass ein Paar $(\lambda_k^1, \lambda_k^2) \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[\times [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ existiert, sodass

$$(2.1) \quad A(e_k + u) - \gamma(e_k + u)^- = \lambda_k^1(e_k + u)$$

$$(2.2) \quad A(-e_k + y) - \gamma(-e_k + y)^- = \lambda_k^2(-e_k + y)$$

Lösungen $u, y \in H_k$ besitzen, wobei $e_k \in E_k$, $\|e_k\| = 1$. Das nachfolgende Lemma 2.1 zeigt, dass man o.B.d.A. annehmen kann, dass die Lösungen die obige Form haben. Da der Beweis für die Existenz von λ_k^1 genau analog wie derjenige von λ_k^2 verläuft, beschränken wir uns auf die Gleichung (2.1).

Den Beweis führen wir mittels der Lyapunow-Schmidt Methode, d.h. wir zerlegen (2.1) in das dazu äquivalente System

$$(2.3) \quad Au - P_k \gamma(e_k + u)^- = \lambda u$$

$$(2.4) \quad Ae_k - Q_k \gamma(e_k + u)^- = \lambda e_k$$

Wir zeigen zuerst, dass (2.3) für beliebige $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ eine eindeutige Lösung $u(\lambda) \in H_k$ besitzt. Infolge der Eindeutigkeit ist u stetig abhängig von λ . Dies wird es uns ermöglichen, ein λ so zu bestimmen, dass

$$(2.5) \quad \lambda_k e_k - Q_k \gamma(e_k + u(\lambda))^- = \lambda e_k,$$

wobei wir benutzt haben, dass gilt $Ae_k = \lambda_k e_k$.

Zuerst beweisen wir das folgende negative Resultat:

2.1. Lemma. Sei $\gamma < \lambda_k - \lambda_{k-1}$, $\mu \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$.

Dann existiert keine Lösung $z \neq 0$ mit $Q_k z = 0$ von

$$(2.6) \quad (A - \mu)z - \gamma P_k z^- = 0,$$

und folglich auch nicht von

$$(2.7) \quad (A - \mu)z - \gamma z^- = 0.$$

Beweis: Wir nehmen an, es gebe eine Lösung $z \neq 0$ mit $Q_k z = 0$.

Sei $z =: w + v$, $w \in E_{1,k-1}$, $v \in H_{1,k}$

Wir machen folgende Fallunterscheidung:

Fall 1: $w = 0$

Dann folgt aus (2.6) durch skalare Multiplikation mit v :

$$(\lambda_{k+1} - \mu) \|v\|^2 \leq ((A - \mu)v, v) + \gamma \|v^-\|^2 = 0$$

Da $\lambda_{k+1} > \mu$, ist also $v = 0$ und somit $z = 0$ im Widerspruch zur Annahme, dass $z \neq 0$.

Fall 2: $w \neq 0$

Aus (2.6) erhalten wir durch skalare Multiplikation mit v resp. mit w das Gleichungssystem

$$(2.8) \quad ((A - \mu)v, v) - \gamma ((w + v)^-, v) = 0$$

$$(2.9) \quad ((A - \mu)w, w) - \gamma ((w + v)^-, w) = 0$$

Nun schreiben wir (2.8) durch Aufspaltung des Skalarprodukts $((w + v)^-, v)$ in zwei Integrale über die Menge $\Omega^- := \{x \in \Omega / w + v < 0\}$ folgendermassen:

$$(2.10) \quad ((A - \mu)v, v) + \gamma \int_{\Omega^-} |v|^2 dx + \gamma \int_{\Omega^-} w \cdot v dx = 0$$

Da $((A - \mu)v, v) + \gamma \int_{\Omega^-} |v|^2 dx \geq 0$, folgt $\gamma \int_{\Omega^-} w \cdot v dx \leq 0$.

Aus (2.9) schliessen wir jetzt:

$$0 = ((A - \mu)w, w) + \gamma \int_{\Omega^-} |w|^2 dx + \gamma \int_{\Omega^-} w \cdot v \, dx \leq \\ \leq (\lambda_{k-1} - \mu) \|w\|^2 + \gamma \|w\|^2 + \gamma \int_{\Omega^-} w \cdot v \, dx < 0 ,$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, weil $\lambda_{k-1} - \mu + \gamma \leq \lambda_{k-1} - \lambda_k + \gamma < 0$ nach Voraussetzung. Also erhalten wir ebenfalls einen Widerspruch. Damit ist Lemma 2.1 bewiesen.

In (2.1) und (2.2) haben wir postuliert, dass es einen gespaltenen Eigenwert $(\lambda_k^1, \lambda_k^2) \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[\times [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ gibt unter der Voraussetzung, dass die zugehörigen Eigenfunktionen die spezielle Form $e_k + u$ bzw. $-e_k + y$ haben, wobei $\|e_k\| = 1$. Das obige Lemma zeigt, dass dies keine einschränkende Annahme ist. In der Tat, $e_k = 0$ keine Lösung $0 \neq u \in H_k$ zu $\mu \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ von (2.7) geben kann. Da das Problem positiv homogen ist, kann man also durch Multiplikation mit einer positiven Funktion immer erreichen, dass $\|e_k\| = 1$.

Wir wenden uns nun zuerst der Gleichung (2.3) zu. Im Hinblick auf später formulieren wir das folgende Lemma in etwas allgemeinerem Rahmen.

2.2. Lemma.

Voraussetzungen: $I \subset \mathbb{R}$ beschränktes Intervall.

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, mit $g(t) := -\gamma \cdot t^- + b(t)$, wo $t^- := \max \{-t, 0\}$, und $|b(t)| \leq c(|t|^\alpha + 1)$, $0 \leq \alpha < 1$.

$0 < \gamma < \lambda_2 - \lambda_1$, falls $k=1$, bzw. $0 < \gamma < \min\{\lambda_k - \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1} - \lambda_k\}$, falls $k \geq 2$. Sei $h_k \in H_k$ beliebig, fest, und seien G und B die von g und b induzierten Nemytskii-Operatoren.

Behauptung: Für jedes λ mit $\lambda_k \leq \lambda < \lambda_{k+1}$ existiert eine Konstante $K > 0$, sodass

$$(2.11) \quad u \neq \tau (A - \lambda)^{-1} (h_k - P_k G(s e_k + u)) , \\ \forall u \in H_k \text{ mit } \|u\| \geq K , \forall s \in I, \forall \tau \in [0,1] .$$

Beweis: Man beachte, dass $(A - \lambda)^{-1}: H_k \rightarrow H_k$ für jedes $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ existiert. Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Die Behauptung sei also nicht wahr. Dann existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $u_n \in H_k$ mit $\|u_n\| \geq n$, sowie ein $s_n \in I$ und ein $\tau_n \in [0,1]$, sodass

$$u_n = \tau_n (A - \lambda)^{-1} (h_k - P_k G(s_n e_k + u_n)) .$$

Anwenden von $A - \lambda$ auf obige Gleichung liefert

$$(A - \lambda)u_n + \tau_n P_k G(s_n e_k + u_n) = \tau_n h_k .$$

Wir dividieren durch $\|u_n\|$ und setzen $\bar{u}_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}$ und erhalten

$$(2.12) \quad (A - \lambda)\bar{u}_n + \frac{\tau_n P_k G(s_n e_k + u_n)}{\|u_n\|} = \frac{\tau_n h_k}{\|u_n\|} .$$

Durch skalare Multiplikation mit $\bar{u}_n$ und Addition von

$$\tau_n \left(\frac{-\gamma(s_n e_k + u_n)^-}{\|u_n\|} , \frac{s_n e_k}{\|u_n\|} \right) \text{ auf beiden Seiten von (2.12)}$$

erhält man

$$(2.13) \quad ((A - \lambda)\bar{u}_n, \bar{u}_n) + \tau_n \left(-\frac{\gamma(s_n e_k + u_n)^-}{\|u_n\|} , \frac{s_n e_k + u_n}{\|u_n\|} \right) + \\ + \tau_n \left(\frac{B(s_n e_k + u_n)}{\|u_n\|} , \bar{u}_n \right) = \tau_n \left(-\frac{\gamma(s_n e_k + u_n)^-}{\|u_n\|} , \frac{s_n e_k}{\|u_n\|} \right) + \tau_n \frac{(h_k, \bar{u}_n)}{\|u_n\|} .$$

Wir bringen noch $\tau_n \left(\frac{B(s_n e_k + u_n)}{\|u_n\|} , \bar{u}_n \right)$ und $-\lambda(\bar{u}_n, \bar{u}_n)$

auf die rechte Seite und schätzen ab:

$$\begin{aligned} (A\bar{u}_n, \bar{u}_n) + \tau_n \gamma \frac{\|(s_n e_k + u_n)^-\|^2}{\|u_n\|^2} &\leq \tau_n \gamma \frac{\|(s_n e_k + u_n)^-\|}{\|u_n\|} \cdot \frac{\|s_n e_k\|}{\|u_n\|} \\ &+ \tau_n \frac{\|B(s_n e_k + u_n)\|}{\|u_n\|} + \lambda + \tau_n \frac{\|h_k\|}{\|u_n\|} . \end{aligned}$$

Da $\frac{\|(s_n e_k + u_n)^-\|}{\|u_n\|}$ beschränkt ist und $\frac{\|B(s_n e_k + u_n)\|}{\|u_n\|} \rightarrow 0$, erhält man $a(\bar{u}_n, \bar{u}_n) \leq \lambda + 1$ für n genügend gross, wobei a die A zugeordnete symmetrische Dirichlet-Bilinearform bezeichne. Mit Hilfe der Garding'schen Ungleichung

$$\alpha \|\bar{u}_n\|_{H_0^m}^2 \leq a(\bar{u}_n, \bar{u}_n) + \beta \|\bar{u}_n\|_{L^2}^2 , \quad \alpha > 0 ,$$

folgt $\alpha \|\bar{u}_n\|_{H_0^m}^2 \leq \lambda + 1 + \beta$.

Da die Einbettung von H_0^m in L^2 gemäss dem Rellich'schen Einbettungssatz kompakt ist, erhält man eine Teilfolge (die wir wieder mit $\bar{u}_n$ bezeichnen) $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ in L^2 . Ausserdem findet man Teilfolgen $\tau_n \rightarrow \tau$ und $s_n \rightarrow s \in I$. Somit folgt

$$\frac{1}{\tau_n} \frac{B(s_n e_k + u_n)}{\|u_n\|} \rightarrow -\gamma P_k \left(\frac{s_n e_k}{\|u_n\|} + \bar{u}_n \right)^- + \frac{1}{\tau_n} \frac{B(s_n e_k + u_n)}{\|u_n\|} \rightarrow -\gamma P_k(\bar{u})^-$$

Aus (2.12) erhält man andererseits

$$\bar{u}_n = \tau_n (A - \lambda)^{-1} \left[\frac{h_k}{\|u_n\|} - \frac{P_k G(s_n e_k + u_n)}{\|u_n\|} \right] ,$$

und hieraus folgt durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$

$$\bar{u} = \tau (A - \lambda)^{-1} [\gamma P_k(\bar{u})^-] \quad \text{und somit}$$

$$(2.14) \quad (A - \lambda)\bar{u} - \tau \gamma P_k(\bar{u})^- = 0, \quad \bar{u} \in H_k.$$

Da $\bar{\gamma} := \tau \gamma < \lambda_k - \lambda_{k-1}$, folgt aus Lemma 2.1 der gewünschte Widerspruch.

2.3. Proposition:

$$\text{Sei } \gamma < \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_1 & , \quad k = 1 \\ \min \{ \lambda_k - \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1} - \lambda_k \} & , \quad k \geq 2 \end{cases}.$$

Dann existiert für jedes $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ genau eine Lösung $u \in H_k$ von

$$(2.15) \quad (A - \lambda)u - P_k \gamma (e_k + u)^- = 0.$$

Beweis: Wir setzen in Lemma 2.2 $s = 1$, $h_k = 0$ und $g = -\gamma(\)^-$. Dann erhält man infolge der Homotopie-Invarianz des Leray-Schauder'schen Abbildungsgrades eine Lösung $u \in H_k$ von (2.15). Zu zeigen bleibt also noch die Eindeutigkeit dieser Lösung. Dazu nehmen wir an, wir hätten eine weitere Lösung $z + y$, $z \in E_{1,k-1}$, $y \in H_{1,k}$, sodass

$$(2.16) \quad (A - \lambda)(z + y) - P_k \gamma (z + e_k + y)^- = 0.$$

Die Lösung $u \in H_k$ von (2.15) zerlegen wir wie folgt:

$$u =: w + v, \quad w \in E_{1,k-1}, \quad v \in H_{1,k}.$$

Subtraktion der Gleichung (2.16) von (2.15) liefert

$$(2.17) \quad (A - \lambda)(w + v - z - y) - P_k \gamma (w + e_k + v)^- + P_k \gamma (z + e_k + y)^- = 0.$$

Wir multiplizieren (2.17) skalar mit $w+v-z-y$ und bringen $((A - \lambda)(w-z), w-z)$ auf die rechte Seite:

$$\begin{aligned} ((A - \lambda)(v-y), v-y) - \gamma((w+e_k+v)^- - (z+e_k+y)^-, w+v-z-y) = \\ = - ((A - \lambda)(w-z), w-z) \end{aligned}$$

Nun schreiben wir im zweiten Summanden

$$w+v-z-y = (w+e_k+v)^+ - (w+e_k+v)^- - (z+e_k+y)^+ + (z+e_k+y)^-$$

und erhalten durch Ausmultiplizieren

$$\begin{aligned} ((A - \lambda)(v-y), v-y) + \gamma \|(w+e_k+v)^- - (z+e_k+y)^-\|^2 + \\ (2.18) \quad + \gamma((w+e_k+v)^-, (z+e_k+y)^+) + \gamma((z+e_k+y)^-, (w+e_k+v)^+) = \\ = ((\lambda - A)(w-z), w-z) \leq \|(\lambda - A)(w-z)\| \cdot \|w-z\| = \\ = \left\| \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda - \lambda_i)(\alpha_i - \beta_i)e_i \right\| \cdot \|w-z\|, \end{aligned}$$

$$\text{wobei wir } w := \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i e_i, \quad z := \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i e_i, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R},$$

entwickelt haben.

Es existiert nun ein $\xi \in [\lambda_1, \lambda_{k-1}]$, sodass

$$(2.19) \quad \left\| \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda - \lambda_i)(\alpha_i - \beta_i)e_i \right\| = (\lambda - \xi) \|w-z\|.$$

Dies sieht man wie folgt:

$$\text{Es ist } \left\| \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda - \lambda_i)(\alpha_i - \beta_i)e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda - \lambda_i)^2 \|(\alpha_i - \beta_i)e_i\|^2 \text{ und}$$

$$\text{weiter } (\lambda - \lambda_1)^2 \sum_{i=1}^{k-1} \|(\alpha_i - \beta_i)e_i\|^2 \leq \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda - \lambda_i)^2 \|(\alpha_i - \beta_i)e_i\|^2 \leq$$

$\equiv (\lambda - \lambda_{k-1})^2 \sum_{i=1}^{k-1} \|(\alpha_i - \beta_i) e_i\|^2$. Also existiert ein $\xi \in [\lambda_1, \lambda_{k-1}]$,

$$\begin{aligned} \text{sodass gilt} \quad \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda - \lambda_i)^2 \|(\alpha_i - \beta_i) e_i\|^2 &= (\lambda - \xi)^2 \sum_{i=1}^{k-1} \|(\alpha_i - \beta_i) e_i\|^2 = \\ &= (\lambda - \xi)^2 \sum_{i=1}^{k-1} \|(\alpha_i - \beta_i) e_i\|^2 = (\lambda - \xi)^2 \|w - z\|^2. \end{aligned}$$

Aus (2.18) erhält man jetzt durch Weglassen der positiven Terme $\gamma((w + e_k + v)^-, (z + e_k + y)^+)$ und $\gamma((z + e_k + y)^-, (w + e_k + v)^+)$ und mit (2.19) die Ungleichung

$$\begin{aligned} (2.20) \quad ((A - \lambda)(v - y), v - y) + \gamma \| (w + e_k + v)^- - (z + e_k + y)^- \|^2 &\leq \\ &\leq (\lambda - \xi) \|w - z\|^2. \end{aligned}$$

Andererseits folgt aus (2.17)

$$(A - \lambda)(w - z) = Q_{1, k-1}(\gamma(w + e_k + v)^- - \gamma(z + e_k + y)^-)$$

und somit

$$\|(A - \lambda)(w - z)\| \leq \gamma \| (w + e_k + v)^- - (z + e_k + y)^- \|.$$

Mit dem oben bestimmten ξ und durch Quadrieren folgt

$$(\lambda - \xi)^2 \|w - z\|^2 \leq \gamma^2 \| (w + e_k + v)^- - (z + e_k + y)^- \|^2.$$

Da nun $\gamma < \lambda - \lambda_{k-1} \leq \lambda - \xi$, erhält man

$$(\lambda - \xi) \|w - z\|^2 \leq \gamma \| (w + e_k + v)^- - (z + e_k + y)^- \|^2.$$

Zusammen mit Ungleichung (2.20) ergibt sich jetzt

$$\begin{aligned}
 ((A - \lambda)(v-y), v-y) + \gamma \| (w+e_k+v)^- - (z+e_k+y)^- \|^2 &\leq \\
 (2.21) \quad &\leq (\lambda - \xi) \|w-z\|^2 \leq \gamma \| (w+e_k+v)^- - (z+e_k+y)^- \|^2 .
 \end{aligned}$$

Also hat man

$$0 \leq (\lambda_{k+1} - \lambda) \|v-y\|^2 \leq ((A - \lambda)(v-y), v-y) \leq 0 ,$$

und somit folgt $v = y$.

Um auch die Gleichheit von w und z zu erhalten, leiten wir zuerst die folgende allgemeingültige Ungleichung her:

$$(2.22) \quad \|a^- - b^-\| \leq \|a - b\| , \quad \text{für alle } a, b \in H .$$

Dies sieht man folgendermassen:

$$\begin{aligned}
 \|a-b\|^2 &= (a-b, a-b) = (a^+ - a^- - b^+ + b^-, a^+ - a^- - b^+ + b^-) = \\
 &= \|a^- - b^-\|^2 + \|a^+ - b^+\|^2 + 2(a^+ - b^+, -a^- + b^-) = \\
 &= \|a^- - b^-\|^2 + \|a^+ - b^+\|^2 + 2(a^+, b^-) + 2(b^+, a^-)
 \end{aligned}$$

Da die letzten drei Summanden der untersten Linie alle nicht-negativ sind, ergibt sich (2.22).

Damit folgt aus der rechten Ungleichung in (2.21)

$$\begin{aligned}
 (\lambda - \xi) \|w-z\|^2 &\leq \gamma \| (w+e_k+v)^- - (z+e_k+y)^- \|^2 = \\
 &= \gamma \| (w+e_k+y)^- - (z+e_k+y)^- \|^2 \leq \gamma \|w-z\|^2 .
 \end{aligned}$$

Weil $\lambda - \xi \geq \lambda - \lambda_{k-1} \geq \lambda_k - \lambda_{k-1} > \gamma$, folgt $w = z$.

Damit ist Proposition 2.3 bewiesen.

Um die Gleichung

$$(2.4) \quad A e_k - Q_k \gamma(e_k + u(\lambda))^- = \lambda e_k$$

nach λ auflösen zu können, brauchen wir die stetige Abhängigkeit von u von λ . Diese beweisen wir im nächsten Lemma.

2.4. Lemma.

Die gemäss Proposition 2.3 eindeutig existierende Lösung $u(\lambda) \in H_k$ von $(A - \lambda)u(\lambda) - P_k \gamma(e_k + u(\lambda))^- = 0$ hängt stetig von $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ ab.

Beweis: Sei $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ eine Folge mit $\lambda_n \rightarrow \lambda$ ($n \rightarrow \infty$).

Wir wollen zeigen, dass $u_n := u(\lambda_n) \rightarrow u(\lambda)$. Wir zeigen zuerst, dass gilt: $\|u_n\| \leq c$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Es gebe eine (Teil-) Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, derart dass $\|u_n\| \rightarrow \infty$. Indem wir $(A - \lambda_n)u_n - P_k \gamma(e_k + u_n)^- = 0$ durch $\|u_n\|$ dividieren und $\bar{u}_n := u_n / \|u_n\|$ setzen, ergibt sich

$$(2.23) \quad (A - \lambda_n)\bar{u}_n - P_k \gamma\left(\frac{e_k}{\|u_n\|} + \bar{u}_n\right)^- = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Durch skalare Multiplikation mit $\bar{u}_n$ und Addition von $-\gamma\left(\bar{u}_n + \frac{e_k}{\|u_n\|}\right)^-, \frac{e_k}{\|u_n\|} + \lambda_n \|\bar{u}_n\|^2$ auf beiden Seiten folgt

$$(A\bar{u}_n, \bar{u}_n) + \gamma\left\|\bar{u}_n + \frac{e_k}{\|u_n\|}\right\|^{-2} = \lambda_n - \gamma\left(\bar{u}_n + \frac{e_k}{\|u_n\|}\right)^-, \frac{e_k}{\|u_n\|}.$$

Da der zweite Term rechts gegen Null strebt für $n \rightarrow \infty$, gilt

$$a(\bar{u}_n, \bar{u}_n) \leq \lambda_n + 1, \quad \text{für } n \text{ genügend gross. Daraus}$$

folgt wie auf Seite 16, dass für eine Teilfolge gilt

$$\bar{u}_n \rightarrow \bar{u} \quad \text{in } L^2.$$

Nun schreiben wir (2.23) in folgender äquivalenter Form

$$\bar{u}_n = (A - \lambda)^{-1}((\lambda_n - \lambda)\bar{u}_n + P_k \gamma(\frac{e_k}{\|u_n\|} + \bar{u}_n)^-)$$

Daraus erhält man im Limes $n \rightarrow \infty$:

$$\bar{u} = (A - \lambda)^{-1}(P_k \gamma(\bar{u})^-)$$

Also hätte man

$$(A - \lambda)\bar{u} - P_k \gamma(\bar{u})^- = 0, \text{ mit } \bar{u} \in H_k, \bar{u} \neq 0,$$

was im Widerspruch zu Lemma 2.1 steht. Somit gilt also

$$\|u_n\| \leq c, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wiederum aus (2.15) erhält man jetzt

$$(Au_n, u_n) + \gamma \|(e_k + u_n)^-\|^2 = \lambda_n \|u_n\|^2 - \gamma((e_k + u_n)^-, e_k) \leq c,$$

und daraus folgt wie vorhin, dass für eine Teilfolge gilt

$u_n \rightarrow u$ in L^2 . Wegen

$$u_n = (A - \lambda)^{-1}((\lambda_n - \lambda)u_n + P_k \gamma(e_k + u_n)^-)$$

erhält man somit für $n \rightarrow \infty$

$$u = (A - \lambda)^{-1}(P_k \gamma(e_k + u)^-),$$

d.h. u ist eine Lösung von (2.15), und wegen Proposition 2.3 die einzige; also gilt $u = u(\lambda)$.

Damit sind wir jetzt in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen.

2.5. Satz.

Sei $\gamma < \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_1 & , \quad k = 1 \\ \min \{ \lambda_k - \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1} - \lambda_k \} & , \quad k \geq 2 \end{cases}$.

Dann existiert ein gespaltener Eigenwert $(\lambda_k^1, \lambda_k^2) \in [\lambda_k, \lambda_k + \gamma] \times [\lambda_k, \lambda_k + \gamma]$, d.h. es gibt Lösungen $u \in H_k$, $y \in H_k$ und λ_k^1, λ_k^2 in $[\lambda_k, \lambda_k + \gamma]$, so dass

$$(2.24) \quad A(e_k + u) - \gamma(e_k + u)^- = \lambda_k(e_k + u)$$

$$(2.25) \quad A(-e_k + y) - \gamma(-e_k + y)^- = \lambda_k(-e_k + y),$$

$$(e_k \in E_k, \|e_k\| = 1).$$

Bemerkung: Die Aussage kann noch im folgenden Sinn verschärft werden:

1. Falls $e_k \geq 0$ auf Ω , dann ist $(\lambda_k^1, \lambda_k^2) = (\lambda_k, \lambda_k + \gamma)$ ein gespaltener Eigenwert (dies gilt für e_1 , wenn A einen elliptischen Differentialausdruck zweiter Ordnung darstellt).

2. Falls e_k das Vorzeichen wechselt in Ω , dann ist der gespaltene Eigenwert $(\lambda_k^1, \lambda_k^2) \in]\lambda_k, \lambda_k + \gamma[\times]\lambda_k, \lambda_k + \gamma[$.

Da Fall 1 trivialerweise aus $(e_k)^- = 0$ bzw. $(-e_k)^- = e_k$ folgt, beschränken wir uns auf Fall 2, d.h. wir nehmen im folgenden an, dass e_k das Vorzeichen wechselt.

Beweis von Satz 2.5. Gemäss Proposition 2.3 und Lemma 2.4 existiert eine eindeutige Lösung $u(\lambda) \in H_k$ von

$$Au(\lambda) - \gamma P_k(e_k + u(\lambda))^- = \lambda u(\lambda), \quad \lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[.$$

die stetig abhängt von λ . Um eine Lösung von (2.24) zu erhalten, müssen wir noch ein $\lambda = \lambda_k^1 \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ finden, sodass

$$(2.26) \quad (A - \lambda)e_k - Q_k \gamma(e_k + u(\lambda))^- = 0.$$

Dazu äquivalent ist die Aufgabe, eine Lösung $\lambda = \lambda_k^1$ von

$$(2.27) \quad ((A - \lambda)e_k - \gamma(e_k + u(\lambda)))^-, e_k = 0$$

zu finden. Wegen $Ae_k = \lambda_k e_k$ und $\|e_k\| = 1$ können wir (2.27) folgendermassen schreiben

$$(2.28) \quad \lambda_k - \lambda - \gamma((e_k + u(\lambda))^-, e_k) = 0.$$

Infolge der Eindeutigkeit von $u(\lambda)$ ist die folgende Funktion wohldefiniert:

$$\Gamma : [\lambda_k, \eta] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda_k + \gamma \leq \eta < \lambda_{k+1},$$

$$\lambda \rightarrow \Gamma(\lambda) := \lambda_k - \lambda - \gamma((e_k + u(\lambda))^-, e_k).$$

Ferner ist Γ stetig, da u stetig von λ abhängt.

Es gilt nun folgendes:

$$(2.29) \quad \Gamma(\lambda_k) = \lambda_k - \lambda_k - \gamma((e_k + u(\lambda_k))^-, e_k) > 0,$$

$$(2.30) \quad \Gamma(\eta) = \lambda_k - \eta - \gamma((e_k + u(\eta))^-, e_k) < 0.$$

Wenn dies gezeigt ist, dann schliesst man mit dem Zwischenwertsatz auf die Existenz eines Wertes $\lambda = \lambda_k^1 \in]\lambda_k, \eta[$ mit

$$0 = \Gamma(\lambda_k^1) = \lambda_k - \lambda_k^1 - \gamma((e_k + u(\lambda_k^1))^-, e_k);$$

der Satz ist dann also bewiesen.

Beweis von (2.29).

Gleichung (2.15) ergibt mit $\lambda = \lambda_k$ und $u(\lambda_k) =: w + v$,
wobei $w \in E_{1,k-1}$, $v \in H_{1,k}$,

$$(2.31) \quad (A - \lambda_k)(w+v) - \gamma P_k(e_k + (w+v)(\lambda_k))^- = 0,$$

und durch skalare Multiplikation mit w :

$$((A - \lambda_k)w - \gamma(e_k + (w+v)(\lambda_k))^-, w) = 0.$$

Wir entwickeln wieder $w := \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ und setzen

$\Omega^- := \{x \in \Omega / (e_k + w + v)(x) < 0\}$. Dann folgt

$$(2.32) \quad \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_k) |\alpha_i|^2 + \gamma \int_{\Omega^-} |w|^2 + \gamma \int_{\Omega^-} (e_k + v)w = 0.$$

Nun ist aber

$$\sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \lambda_k) |\alpha_i|^2 + \gamma \int_{\Omega^-} |w|^2 \leq (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \|w\|^2 + \gamma \|w\|^2 \leq 0,$$

wegen der Voraussetzung an γ , wobei Gleichheit in der rechten Ungleichung nur eintritt für $w = 0$. Also folgt aus

$$\text{Gleichung (2.32)} \quad \gamma \int_{\Omega^-} (e_k + v) \cdot w > 0, \text{ für } w \neq 0.$$

Wir multiplizieren (2.31) mit v und addieren die so erhaltene Gleichung mit $\Gamma(\lambda_k)$ und folgern

$$\begin{aligned} & ((A - \lambda_k)(e_k + v)(\lambda_k), e_k + v) - \gamma((e_k + (w+v)(\lambda_k))^-, e_k + v) = \\ & = ((A - \lambda_k)(e_k + v), e_k + v) + \gamma \int_{\Omega^-} |e_k + v|^2 + \gamma \int_{\Omega^-} w(e_k + v) > 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, weil:

$$\gamma \int_{\Omega} |e_k + v|^2 > 0, \quad \text{wenn } v = 0, w = 0$$

$$((A - \lambda_k)(e_k + v), e_k + v) > 0, \quad \text{wenn } v \neq 0$$

$$\gamma \int_{\Omega} w(e_k + v) > 0, \quad \text{wenn } w \neq 0.$$

Da jedoch $((A - \lambda_k)v(\lambda_k) - \gamma(e_k + (w+v)(\lambda_k)))^-, v) = 0$ ist, folgt aus obiger Ungleichung (2.29).

Beweis von (2.30).

Falls $u(\eta) = 0$, folgt direkt aus (2.30) unter Beachtung der Tatsache, dass e_k das Vorzeichen wechselt:

$$\lambda_k - \eta + \gamma \int_{\Omega} |e_k^-|^2 < \lambda_k - \eta + \gamma \leq 0.$$

Im folgenden sei also $u(\eta) \neq 0$. Gleichung (2.15) ergibt mit $\lambda = \eta$ und $u(\eta) := (w+v)(\eta)$, $w \in E_{1,k-1}$, $v \in H_{1,k}$, und durch skalare Multiplikation mit v

$$(2.33) \quad ((A - \eta)v(\eta), v) + \gamma \int_{\Omega} (e_k + (w+v)(\eta)) \cdot v = 0.$$

Da $((A - \eta)v, v) + \gamma \int_{\Omega} |v|^2 > 0$, falls $v \neq 0$, folgt

$$\gamma \int_{\Omega} (e_k + w)v < 0, \quad \text{für } v \neq 0. \text{ Durch Addition von (2.15)}$$

(skalar multipliziert mit w) mit $\Gamma(\eta)$ erhält man

$$((A - \eta)(w + e_k) - \gamma(e_k + w + v))^{-}, w + e_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} (\lambda_i - \eta) |\alpha_i|^2 + (\lambda_k - \eta) \|e_k\|^2 + \gamma \int_{\Omega} (e_k + w + v)(w + e_k) \leq$$

$$\leq (\lambda_{k-1} - \eta) \|w\|^2 + (\lambda_k - \eta) \|e_k\|^2 + \gamma \|w + e_k\|^2 + \gamma \int_{\Omega} v(w + e_k) =$$

$$= (\lambda_{k-1} - \eta + \gamma) \|w\|^2 + (\lambda_k - \eta + \gamma) \|e_k\|^2 + \gamma \int_{\Omega} v(w + e_k) < 0,$$

wobei die letzte Ungleichung gilt, weil

$$(\lambda_{k-1} - \eta + \gamma) \|w\|^2 < 0, \quad \text{wenn } w \neq 0$$

$$\gamma \int_{\Omega} v(w + e_k) \, dx < 0, \quad \text{wenn } v \neq 0.$$

Da aber $((A - \eta)w(\eta), w) - \gamma((e_k + (w+v)(\eta))^{-}, w) = 0$ ist, folgt (2.30).

Der Beweis für die Existenz von λ_k^2 , sodass (2.25) gilt, verläuft genau analog, indem man überall (auch in den Lemmas und der Proposition) e_k durch $-e_k$ ersetzt.

3. Eindeutigkeit der gespaltenen Eigenwerte

Wir wollen zeigen, dass für $e_k \in E_k$, $\|e_k\| = 1$, höchstens ein $\lambda = \lambda_k^1 \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ existiert, sodass

$$(A - \lambda)(e_k + u) - \gamma(e_k + u)^- = 0$$

eine Lösung $u \in H_k$ besitzt. Wir erinnern nochmals daran, dass sich jede Lösung der obigen Gleichung in der Form $e_k + u$ (bzw. $-e_k + y$) schreiben lässt (vgl. Lemma 2.1).

Für den Eindeutigkeits-Beweis benötigen wir folgende Proposition. Bemerkenswert ist die Ähnlichkeit zur Herleitung der Orthogonalitätsrelation für Eigenfunktionen bei linearen selbstadjungierten Problemen.

3.1. Proposition.

Sei $(A - \lambda)p - \gamma p^- = 0$, $(A - \mu)q - \gamma q^- = 0$.

Dann gilt

$$(3.1) \quad (\mu - \lambda)(q, p) = \gamma(q^+, p^-) - \gamma(q^-, p^+) .$$

Beweis: Aus $((A - \lambda)p - \gamma p^-, q) = 0$ folgt

$$\begin{aligned} 0 &= ((A - \mu)p, q) + (\mu - \lambda)(p, q) - \gamma(p^-, q) + \gamma(q^-, p) \\ &\quad - \gamma(q^-, p) . \end{aligned}$$

Da $((A - \mu)p, q) - \gamma(q^-, p) = ((A - \mu)q - \gamma q^-, p) = 0$, folgt weiter

$$\begin{aligned} 0 &= (\mu - \lambda)(p, q) - \gamma(p^-, q) + \gamma(q^-, p) = \\ &= (\mu - \lambda)(p, q) - \gamma(p^-, q^+) + \gamma(q^-, p^+) . \end{aligned}$$

Wir kommen nun zum Beweis der Eindeutigkeit der gespaltenen Eigenwerte. Dazu nehmen wir an, es gebe einen weiteren gespaltenen Eigenwert $(\mu^1, \mu^2) \neq (\lambda_k^1, \lambda_k^2)$, wobei $(\mu^1, \mu^2) \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[\times [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$. Wir beschränken uns wieder darauf, zu zeigen, dass gilt $\mu^1 = \lambda_k^1$; der Beweis von $\mu^2 = \lambda_k^2$ verläuft analog.

3.2. Satz.

Sei $\gamma < \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_1 & , \quad k = 1 \\ \min \{ \lambda_k - \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1} - \lambda_k \} & , \quad k \geq 2 \end{cases}$.

Dann existiert höchstens ein gespaltenen Eigenwert

$$(\lambda_k^1, \lambda_k^2) \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[\times [\lambda_k, \lambda_{k+1}[.$$

Beweis: Es gilt

$$(3.2) \quad (A - \lambda_k^1)(e_k + u) - \gamma(e_k + u)^- = 0, \quad u \in H_k .$$

Wir nehmen an, es gebe einen weiteren Wert $\mu^1 \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ und ein $x \in H_k$, sodass

$$(3.3) \quad (A - \mu^1)(e_k + x) - \gamma(e_k + x)^- = 0, \quad x \in H_k .$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\mu^1 > \lambda_k^1$. Durch Subtraktion von (3.2) von (3.3) erhalten wir

$$(3.4) \quad (A - \mu^1)(x - u) + (\lambda_k^1 - \mu^1)(e_k + u) - \gamma(e_k + x)^- + \gamma(e_k + u)^- = 0 .$$

Wir schreiben wieder $u =: w + v$, $w \in E_{1,k-1}$, $v \in H_{1,k}$

$$x =: z + y, \quad z \in E_{1,k-1}, \quad y \in H_{1,k} .$$

Indem man (3.4) skalar mit $x - u = z + y - w - v$ multi-

pliziert und auf beiden Seiten $((A - \mu)(z-w), z-w)$ subtrahiert, ergibt sich

$$\begin{aligned}
 & ((A - \mu^1)(y-v), y-v) + (\mu^1 - \lambda_k^1) \|w + e_k + v\|^2 + (\lambda_k^1 - \mu^1) \cdot \\
 (3.5) \quad & (z + e_k + y, w + e_k + v) - \gamma((z + e_k + y)^- - (w + e_k + v)^-, z + e_k + y - w - e_k - v) \\
 & = -((A - \mu^1)(z-w), z-w) .
 \end{aligned}$$

Nun ersetzen wir den dritten Summanden links mittels (3.1) und multiplizieren den vierten Summanden aus (vgl. (2.18)):

$$\begin{aligned}
 & ((A - \mu^1)(y-v), y-v) + (\mu^1 - \lambda_k^1) \|w + e_k + v\|^2 + \\
 & + \gamma((w + e_k + v)^+, (z + e_k + y)^-) - \gamma((w + e_k + v)^-, (z + e_k + y)^+) + \\
 & + \gamma\|(z + e_k + y)^- - (w + e_k + v)^-\|^2 + \gamma((z + e_k + y)^-, (w + e_k + v)^+) + \\
 & + \gamma((w + e_k + v)^-, (z + e_k + y)^+) = -((A - \mu^1)(z-w), z-w) .
 \end{aligned}$$

Daraus erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 & ((A - \mu^1)(y-v), y-v) + (\mu^1 - \lambda_k^1) \|w + e_k + v\|^2 + \\
 (3.6) \quad & + \gamma\|(z + e_k + y)^- - (w + e_k + v)^-\|^2 \leq \|(\mu^1 - A)(z-w)\| \cdot \|z-w\| \\
 & = (\mu^1 - \tilde{\xi}) \|z-w\|^2 ,
 \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\xi} \in [\lambda_1, \lambda_{k-1}]$ (vgl. (2.19)) .

Für $k = 1$ sind wir fertig, da dann $z = w = 0$. Für $k \geq 2$ folgt aus dem nachstehenden Lemma 3.3

$$(3.7) \quad (\mu^1 - \tilde{\xi}) \|z-w\|^2 \leq (\mu^1 - \lambda_k^1) \|w\|^2 + \gamma \| (z+e_k+y)^- - (w+e_k+v)^- \|^2.$$

Zusammen mit (3.6) ergibt dies

$$\begin{aligned} & ((A - \mu^1)(y-v), y-v) + (\mu^1 - \lambda_k^1) (\|w\|^2 + \|e_k+v\|^2) + \\ & + \gamma \| (z+e_k+y)^- - (w+e_k+v)^- \|^2 \leq (\mu^1 - \tilde{\xi}) \|z-w\|^2 \leq \\ & (\mu^1 - \lambda_k^1) \|w\|^2 + \gamma \| (z+e_k+y)^- - (w+e_k+v)^- \|^2. \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $\mu^1 = \lambda_k^1$ und $y = v$.

Ferner folgt aus (3.7) zusammen mit (2.22)

$$(\mu^1 - \tilde{\xi}) \|z-w\|^2 \leq \gamma \|z-w\|^2.$$

Da $\mu^1 - \tilde{\xi} \geq \mu^1 - \lambda_{k-1} \geq \lambda_k - \lambda_{k-1} > \gamma$, folgt $z = w$.

Wir müssen noch das folgende Lemma beweisen.

3.3. Lemma.

Voraussetzung: $\gamma < \min \{ \lambda_k - \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1} - \lambda_k \}$, $k \geq 2$, und

$$\begin{aligned} (3.8) \quad 0 &= (A - \lambda_k^1)w - Q_{1,k-1} \gamma (w+e_k+v)^- \\ 0 &= (A - \mu^1)z - Q_{1,k-1} \gamma (z+e_k+y)^- \end{aligned}$$

Behauptung:

$$(\mu^1 - \tilde{\xi}) \|z-w\|^2 \leq (\mu^1 - \lambda_k^1) \|w\|^2 + \gamma \| (z+e_k+y)^- - (w+e_k+v)^- \|^2,$$

wobei $\tilde{\xi} \in [\lambda_1, \lambda_{k-1}]$ so, dass $\|(\mu^1 - A)(z-w)\| = (\mu^1 - \tilde{\xi}) \|z-w\|$
(vgl. (2.19)).

Beweis: Aus (3.8) folgt durch Subtraktion

$$- Q_{1,k-1}(\gamma(z+e_k+y)^- - \gamma(w+e_k+v)^-) = (\mu^1 - A)(z-w) + (\mu^1 - \lambda_k^1)w.$$

Nun schliessen wir folgendermassen:

$$\begin{aligned} \|\gamma(z+e_k+y)^- - \gamma(w+e_k+v)^-\|^2 &\cong \|(\mu^1 - A)(z-w) + (\mu^1 - \lambda_k^1)w\|^2 = \\ &= \|(\mu^1 - A)(z-w)\|^2 + (\mu^1 - \lambda_k^1)^2 \|w\|^2 + 2((\mu^1 - A)(z-w), (\mu^1 - \lambda_k^1)w) \cong \\ &\cong \|(\mu^1 - A)(z-w)\|^2 + (\mu^1 - \lambda_k^1)^2 \|w\|^2 - 2\|(\mu^1 - A)(z-w)\| \|(\mu^1 - \lambda_k^1)w\| = \\ &= \|(\mu^1 - \tilde{\xi})(z-w)\|^2 + (\mu^1 - \lambda_k^1)^2 \|w\|^2 - 2(\mu^1 - \tilde{\xi})(\mu^1 - \lambda_k^1) \|z-w\| \|w\| \cong \\ &\cong (\mu^1 - \tilde{\xi})^2 \|z-w\|^2 + (\mu^1 - \lambda_k^1)^2 \|w\|^2 - 2(\mu^1 - \tilde{\xi})(\mu^1 - \lambda_k^1) \|z-w\| \|w\| \\ &= (\mu^1 - \tilde{\xi})(\mu^1 - \tilde{\xi}) - (\mu^1 - \lambda_k^1) \|z-w\|^2 + (\mu^1 - \lambda_k^1)((\mu^1 - \lambda_k^1) - (\mu^1 - \tilde{\xi})) \|w\|^2 \\ &= (\mu^1 - \tilde{\xi})(\lambda_k^1 - \tilde{\xi}) \|z-w\|^2 - (\mu^1 - \lambda_k^1)(\lambda_k^1 - \tilde{\xi}) \|w\|^2. \end{aligned}$$

Wir dividieren diese Ungleichung noch durch $(\mu^1 - \tilde{\xi})$ und erhalten

$$\frac{1}{(\lambda_k^1 - \tilde{\xi})} \|\gamma(z+e_k+y)^- - \gamma(w+e_k+v)^-\|^2 \leq (\mu^1 - \tilde{\xi}) \|z-w\|^2 - (\mu^1 - \lambda_k^1) \|w\|^2.$$

Da $\gamma < \lambda_k - \lambda_{k-1} \cong \lambda_k^1 - \tilde{\xi}$, ist $\frac{1}{\lambda_k^1 - \tilde{\xi}} > 1$, und

$$\text{somit} \quad \frac{\gamma^2}{\lambda_k^1 - \tilde{\xi}} < \gamma.$$

3.4. Bemerkung.

Für ein fest gewähltes $e_k \in E_k$, $\|e_k\| = 1$, kann sowohl

$$\lambda_k^1 \leq \lambda_k^2 \quad \text{als auch} \quad \lambda_k^1 > \lambda_k^2$$

auftreten. Wenn wir im zweiten Fall aber $\bar{e}_k := -e_k$ setzen, dann gilt selbstverständlich $\bar{\lambda}_k^1 < \bar{\lambda}_k^2$. Man kann also e_k immer so wählen, dass gilt $\lambda_k^1 \leq \lambda_k^2$. Dies werden wir im folgenden immer so tun.

4. Die inhomogene Gleichung

A. Die Gleichung befindet sich nicht in Resonanz bez. eines gespaltenen Eigenwertes

Wir wollen nun den nichtlinearen Operator

$$(4.1) \quad (A - \lambda) - \gamma(\cdot)^- : H \supset D(A) \rightarrow H$$

durch einen sublinearen Operator B stören und bestimmen, für welche $h \in H$ die Gleichung

$$(4.2) \quad (A - \lambda)x - \gamma \cdot x^- + B(x) = h$$

Lösungen besitzt. Dabei nehmen wir in diesem Abschnitt an, die ungestörte Gleichung befinde sich nicht in Resonanz, d.h. es gelte $\lambda \neq \lambda_k^1$, $i = 1, 2$, $k \in \mathbb{N}$. Das bedeutet, dass das homogene Problem $(A - \lambda)u - \gamma \cdot u^- = 0$ nur die triviale Lösung hat.

Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ und $\lambda_k^1 = \lambda_k^2$.

4.1. Satz.

Sei a) $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$, $\lambda_k^1 = \lambda_k^2$, $\lambda \neq \lambda_k^1$,

$$b) \quad \gamma < \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_1, & k = 1, \\ \min \{ \lambda_k - \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1} - \lambda_k \}, & k \geq 2, \end{cases}$$

c) $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, mit $|b(s)| \leq c(|s|^\alpha + 1)$, wobei $0 \leq \alpha < 1$; $B : H \rightarrow H$, von b induzierter Nemytskii-Operator.

Dann hat die Gleichung (4.2) für alle $h \in H$ mindestens eine Lösung.

Beweis: Wir spalten die Gleichung (4.2) auf in das dazu äquivalente System

$$(4.3) \quad (A - \lambda)u - P_k \gamma(se_k + u)^- + P_k B(se_k + u) = P_k h$$

$$(4.4) \quad (A - \lambda)se_k - Q_k \gamma(se_k + u)^- + Q_k B(se_k + u) = Q_k h ,$$

wobei $x =: se_k + u$, mit $s \in \mathbb{R}$, $u \in H_k$.

Mit Lemma 2.2 erhält man infolge der Homotopie-Invarianz des Leray-Schauder'schen Abbildungsgrades für jedes feste $s \in \mathbb{R}$ eine Lösung $u \in H_k$ von (4.3). Diese Lösung ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Sei

$$\Sigma := \{(s, u) \in \mathbb{R} \times H_k \mid (A - \lambda)u - P_k \gamma(se_k + u)^- + P_k B(se_k + u) = P_k h \}$$

Die Lösungen der Gleichung (4.2) sind genau die Paare $(s, u) \in \Sigma$ die der Gleichung (4.4) genügen. Um (4.4) zu lösen, verwenden wir eine Methode, die in Hess - Ruf [5] für ein superlineares Problem entwickelt worden ist. Äquivalent zu (4.4) ist die folgende Gleichung

$$(4.5) \quad \Phi(s, u) := (\lambda_k - \lambda)s - \gamma((se_k + u)^-, e_k) + (B(se_k + u), e_k) = t,$$

$$t := (Q_k h, e_k), \quad (s, u) \in \Sigma.$$

$\Phi : \mathbb{R} \times H_k \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine stetige Abbildung.

Wir unterscheiden:

Fall 1: $\lambda_k \leq \lambda < \lambda_k^1 = \lambda_k^2$.

a) Beh. Für $s \rightarrow +\infty$ gilt $\Phi(s, u) \rightarrow +\infty$, $(s, u) \in \Sigma$.

Bew. Wir zeigen zuerst, dass $\|\frac{u}{s}\| \leq c$, für $s \rightarrow +\infty$.

Dazu nehmen wir an, es existiere eine Folge $\frac{\|u_n\|}{s_n} \rightarrow \dots$.
Wir dividieren zunächst (4.3) durch s_n :

$$(4.6) \quad (A - \lambda) \frac{u_n}{s_n} - P_k \gamma (e_k + \frac{u_n}{s_n})^- + \frac{1}{s_n} P_k B(s_n e_k + u_n) = \frac{P_k h}{s_n}$$

Nun dividieren wir (4.6) durch $\frac{\|u_n\|}{s_n}$ und bilden das Skalarprodukt mit $\bar{u}_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}$:

$$((A - \lambda) \bar{u}_n, \bar{u}_n) - ((\frac{s_n e_k + u_n}{\|u_n\|})^-, \bar{u}_n) + (\frac{B(s_n e_k + u_n)}{\|u_n\|}, \bar{u}_n) = \frac{P_k h}{\|u_n\|}, \bar{u}_n$$

Wir erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned} ((A - \lambda) \bar{u}_n, \bar{u}_n) + \gamma \|(\bar{u}_n)^-\|^2 &\leq \frac{\|B(s_n(e_k + \frac{u_n}{s_n}))\|}{s_n \frac{\|u_n\|}{s_n}} + \\ &+ \|\gamma (\frac{e_k s_n}{\|u_n\|} + \bar{u}_n)^- - \gamma (\bar{u}_n)^-\| + \frac{\|P_k h\|}{\|u_n\|} : \\ &= \frac{\|B(s_n(e_k + \frac{u_n}{s_n}))\|}{s_n \|e_k + \frac{u_n}{s_n}\|} \frac{\|e_k + \frac{u_n}{s_n}\|}{\frac{\|u_n\|}{s_n}} + \gamma \frac{\|e_k s_n\|}{\|u_n\|} + \frac{\|P_k h\|}{\|u_n\|} , \end{aligned}$$

wobei wir für die zweite Ungleichung (2.22) benützt haben.

Da die letzte Zeile gegen 0 konvergiert für $n \rightarrow \infty$, folgt

$$((A \bar{u}_n, \bar{u}_n) \leq \lambda + 1, \text{ für } n \text{ genügend gross.}$$

Wie auf Seite 16 erhalten wir eine Teilfolge $\bar{u}_n \rightarrow \bar{u}$ in L^2 .

Indem wir nun (4.6) durch $\frac{\|u_n\|}{s_n}$ dividieren und wie in (2.14)

den Limes $n \rightarrow \infty$ vollziehen, erhalten wir

$$(A - \lambda)\bar{u} - P_k \gamma(\bar{u})^- = 0, \quad \bar{u} \in H_k, \quad \|\bar{u}\| = 1,$$

was einen Widerspruch zu Lemma 2.1 darstellt. Somit ist also $\|\frac{u}{s}\| \leq c$, für alle $s \geq 1$.

Die Behauptung a) beweisen wir ebenfalls indirekt, d.h. wir nehmen an, es existiere eine Konstante c und eine Folge (s_n) , sodass $s_n \rightarrow \infty$ und

$$(4.7) \quad \phi(s_n, u_n) \leq c, \quad \text{für } (s_n, u_n) \in \Sigma.$$

Da gemäss den obigen Ueberlegungen $\frac{\|u_n\|}{s_n} \leq c$, schliessen wir aus (4.6), dass

$$(4.8) \quad (A \frac{u_n}{s_n}, \frac{u_n}{s_n}) \leq c, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Also existiert eine konvergente Teilfolge $\frac{u_n}{s_n} \rightarrow v \in H_k$.

Da $\frac{1}{s_n} P_k B(s_n(e_k + \frac{u_n}{s_n}))$ gegen 0 konvergiert für $n \rightarrow \infty$, erhält man aus (4.6) durch Grenzübergang wie in (2.14):

$$(4.9) \quad (A - \lambda)v - P_k \gamma(e_k + v)^- = 0.$$

Ferner folgt aus der Annahme (4.7)

$$\limsup_{s_n \rightarrow \infty} \frac{\phi(s_n, u_n)}{s_n} \leq 0, \quad (s_n, u_n) \in \Sigma.$$

Da nach Proposition 2.3 das v in (4.9) eindeutig bestimmt ist, folgt

$$(4.10) \quad \limsup_{s_n \rightarrow \infty} \frac{\phi(s_n, u_n)}{s_n} = (\lambda_k - \lambda) - \gamma((e_k + v)^-, e_k) = \Gamma(\lambda).$$

Laut (2.29) ist $\Gamma(\lambda_k) > 0$. Ausserdem folgt aus Satz 3.2, dass λ_k^1 die einzige Nullstelle von Γ ist. Somit muss für $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_k^1[$ gelten: $\Gamma(\lambda) > 0$. Dieser Widerspruch zeigt, dass unsere Annahme falsch war, d.h. es muss gelten

$$\Phi(s, u) \rightarrow +\infty, \quad s \rightarrow +\infty, \quad (s, u) \in \Sigma.$$

b) Beh. Für $s \rightarrow -\infty$ gilt $\Phi(s, u) \rightarrow -\infty$, $(s, u) \in \Sigma$.

Bew. Wie in a) erhält man $\|\frac{u}{s}\| \leq c$, für alle $s \leq -1$.

Nun nehmen wir an, es gebe eine Konstante c und eine Folge $s_n \rightarrow -\infty$, sodass

$$(4.11) \quad \Phi(s_n, u_n) \geq -c, \quad \text{für } (s_n, u_n) \in \Sigma.$$

Wieder wie in a) erhält man eine konvergente Teilfolge

$$\frac{u_n}{-s_n} \rightarrow w \in H_k, \text{ und } w \text{ ist Lösung von } (A - \lambda)w - P_k \gamma(-e_k + w)^- = 0.$$

Aus (4.11) folgt

$$(4.12) \quad \liminf_{s_n \rightarrow -\infty} \frac{\Phi(s_n, u_n)}{-s_n} \geq 0, \quad (s_n, u_n) \in \Sigma.$$

Wegen der Eindeutigkeit von w , gilt

$$\liminf_{s_n \rightarrow -\infty} \frac{\Phi(s_n, u_n)}{-s_n} = ((\lambda_k - \lambda)(-e_k) - \gamma(-e_k + w)^-, e_k) = -\Gamma_-(\lambda).$$

$$\text{wobei } \Gamma_-(\lambda) = ((\lambda_k - \lambda)(-e_k) - \gamma(-e_k + w)^-, -e_k).$$

Somit wäre also $\Gamma_-(\lambda) \leq 0$. Wie vorhin folgt aber aus

$$\Gamma_-(\lambda_k) > 0 \quad (\text{vertausche } e_k \text{ mit } (-e_k)) \text{ und } \lambda \in [\lambda_k^1, \lambda_k^2[: \Gamma_-(\lambda) > 0.$$

Mit diesem Widerspruch ist die Behauptung bewiesen.

Wir sind auf der Suche nach einem $(s, u) \in \Sigma$, sodass $\Phi(s, u) = t$. Um dies zu erreichen, wählen wir zuerst ein $\alpha \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$(4.13) \quad \Phi(\alpha, u) < t, \quad \text{für alle } (\alpha, u) \in \Sigma.$$

Analog wählen wir $\beta \in \mathbb{R}$, sodass

$$(4.14) \quad \Phi(\beta, u) > t, \quad \text{für alle } (\beta, u) \in \Sigma.$$

Aus Lemma 2.2 folgt mit $I = [\alpha, \beta]$ und $\tau = 1 : \|u\| \leq c$ und somit $|\Phi(\delta, u)| \leq \bar{c}$, für alle $(\delta, u) \in \Sigma$, $\delta \in [\alpha, \beta]$.

Somit können wir ein Resultat von Amann-Ambrosetti-Mancini [1] benutzen. Gemäss Lemma 1.2 in dieser Arbeit existiert eine zusammenhängende Teilmenge σ von Σ , die $\Sigma \cap (\alpha \times H_k)$ und $\Sigma \cap (\beta \times H_k)$ verbindet, d.h. es ist $\text{Pr } \sigma = [\alpha, \beta]$. Infolge der Stetigkeit von Φ ist $\Phi(\sigma)$ ein Intervall in $\mathbb{R}$. Also folgt wegen (4.13) und (4.14), dass ein $(s, u) \in \Sigma$ existiert mit $\Phi(s, u) = t$. Damit ist bewiesen, dass (4.2) für alle $h \in H$ mindestens eine Lösung besitzt.

Fall 2: $\lambda_k^1 = \lambda_k^2 < \lambda < \lambda_{k+1}$.

Beh. Für $s \rightarrow +\infty$ gilt $\Phi(s, u) \rightarrow -\infty$, $(s, u) \in \Sigma$.

Bew. Dies können wir rasch erledigen, da alles analog wie in a) gezeigt wird:

Aus (4.3) erhält man durch Division durch s und mittels Limesübergang wie oben eine Lösung v von

$$(A - \lambda)v - P_k \gamma(e_k + v)^- = 0, \quad v \in H_k.$$

Aus der Annahme $-c \leq \Phi(s_n, u_n)$ für eine Folge $s_n \rightarrow \infty$, $(s_n, u_n) \in \Sigma$, folgt

$$0 \leq \liminf_{s_n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n} \Phi(s_n, u_n) = \Gamma(\lambda).$$

Wenn wir aber $\eta > \max \{\lambda_k + \gamma, \lambda\}$, $\eta < \lambda_{k+1}$ wählen, so folgt aus (2.30) $\Gamma(\eta) < 0$. Da $\lambda \in]\lambda_k^1, \eta[$ und λ_k^1 die einzige Nullstelle von Γ ist, folgt $\Gamma(\lambda) < 0$. Dieser Widerspruch ergibt die Behauptung.

Ebenfalls wie in a) folgt die

Beh. Für $s \rightarrow -\infty$ gilt $\phi(s, u) \rightarrow +\infty$, $(s, u) \in \Sigma$.

Wir können also wieder α und β so wählen, dass (4.13) und (4.14) erfüllt sind. Also folgt wie vorhin die Existenz einer Lösung. Somit ist alles bewiesen.

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass der gespaltene Eigenwert tatsächlich gespalten ist, d.h. dass $\lambda_k^1 \neq \lambda_k^2$. Wegen Bemerkung 3.4 können wir o.B.d.A. $\lambda_k^1 < \lambda_k^2$ setzen.

4.2. Satz.

Sei a) $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$, $\lambda_k^1 < \lambda_k^2$.

$$b) \quad \gamma < \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_1, & k = 1, \\ \min \{\lambda_k - \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1} - \lambda_k\}, & k \geq 2, \end{cases}$$

c) $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $B: H \rightarrow H$ wie in Satz 4.1.c).

Dann gilt:

1. Falls $\lambda \notin [\lambda_k^1, \lambda_k^2]$, so hat die Gleichung (4.2) für alle $h \in H$ mindestens eine Lösung.
2. Falls $\lambda \in]\lambda_k^1, \lambda_k^2[$, so existiert für jedes $h_k \in H_k$ eine von h_k abhängige Konstante $T(h_k)$, sodass (4.2) für $h = te_k + h_k$ mit $t < T(h_k)$ mindestens zwei Lösungen

besitzt. Ferner existiert eine Konstante $T_1(h_k)$, so-
dass (4.2) für $t > T_1(h_k)$ keine Lösung besitzt.

Beweis:

1. In diesem Fall verfährt man genau wie in Satz 4.1. Entweder ist $\lambda_k \leq \lambda < \lambda_k^1$, dann ist man im Fall 1, oder es ist $\lambda_k^1 < \lambda < \lambda_{k+1}^1$, d.h. man ist im Fall 2.

2. Wir betrachten wieder das System (4.3) und (4.4) und definieren wie in (4.5) die stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} \times H_k &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, u) &\rightarrow (\lambda_k - \lambda)s - \gamma((se_k + u)^-, e_k) + (B(se_k + u), e_k) \end{aligned}$$

Beh. Für $s \rightarrow \pm \infty$ gilt $\Phi(s, u) \rightarrow -\infty$, $(s, u) \in \Sigma$.

Bew. a) $s \rightarrow +\infty$. Man nimmt wieder an, es existiere eine Konstante c und eine Folge $s_n \rightarrow +\infty$, sodass

$$\Phi(s_n, u_n) \geq -c, \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und schliesst wie in Satz 4.1, dass

$$(4.15) \quad 0 \leq \liminf_{s_n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(s_n, u_n)}{s_n} = (\lambda_k - \lambda) - \gamma((e_k + v)^-, e_k) = \Gamma(\lambda).$$

Für $\eta > \max\{\lambda_k + \gamma, \lambda\}$ und $\eta < \lambda_{k+1}^1$ gilt jedoch nach (2.30) $\Gamma(\eta) < 0$. Da $\lambda \in]\lambda_k^1, \eta[$ und da λ_k^1 die einzige Nullstelle von Γ ist (Satz 3.2), muss $\Gamma(\lambda) < 0$ sein. Dies ist ein Widerspruch zu (4.15).

b) $s \rightarrow -\infty$. Aus der Annahme $\Phi(s_n, u_n) \geq -c$, für eine Folge $s_n \rightarrow -\infty$, ergibt sich wie oben

$$\begin{aligned} (4.16) \quad 0 \leq \liminf_{s_n \rightarrow -\infty} \frac{\Phi(s_n, u_n)}{-s_n} &= ((\lambda_k - \lambda)(-e_k) - \gamma(-e_k + w)^-, e_k) \\ &= -\Gamma_-(\lambda). \end{aligned}$$

Aus (2.29) folgt $\Gamma_-(\lambda_k) > 0$, und da $\lambda_k < \lambda < \lambda_k^2$, wobei λ_k^2 die einzige Nullstelle von Γ_- ist, folgt $\Gamma_-(\lambda) > 0$, im Widerspruch zu (4.16).

Somit ist die Behauptung bewiesen.

Wir zeigen noch die

Beh. $|\phi(0,u)| \leq c$, für alle $(0,u) \in \Sigma$.

Bew. Aus Lemma 2.2 folgt mit $s = 0$ und $\tau = 1$: $\|u\| \leq K$.

Daraus ergibt sich sofort die Behauptung.

Wir kommen nun zum Beweis der Existenz einer Konstanten $T(h_k)$, sodass mindestens zwei Lösungen $(s,u) \in \Sigma$ existieren von

$$\phi(s,u) = t, \quad \text{für alle } t < T(h_k).$$

Sei also $h_k \in H_k$ beliebig gegeben. Wir behaupten, dass

$$T := \inf \{ t(C,u) \mid (C,u) \in \Sigma \}$$

der obigen Forderung genügt. Sei also $t < T$ gegeben. Da $\phi(s,u) \rightarrow -\infty$ für $s \rightarrow +\infty$, $(s,u) \in \Sigma$, können wir ein $\beta \in \mathbb{R}^+$ so wählen, dass $\phi(\beta,u) < t$, für alle $(\beta,u) \in \Sigma$. Mit Hilfe des erwähnten Lemmas von Amann - Ambrosetti - Mancini erhält man eine zusammenhängende Teilmenge σ von Σ , sodass $\text{Pr}_{\mathbb{R}} \sigma = [0, \beta]$. Also ist $\phi(\sigma)$ ein Intervall in $\mathbb{R}$. Da $\phi(0,u) > t$, für alle $(0,u) \in \Sigma$, und $\phi(\beta,u) < t$, für alle $(\beta,u) \in \Sigma$, ergibt sich die Existenz eines Wertes $s_1 \in]0, \beta[$, sodass

$$\phi(s_1, u) = t, \quad \text{mit einem } (s_1, u) \in \Sigma$$

Andererseits können wir wegen $\phi(s,u) \rightarrow -\infty$, für $s \rightarrow -\infty$, $(s,u) \in \Sigma$, ein $\alpha \in \mathbb{R}^-$ so wählen, dass $\phi(\alpha, u) < t$, für

alle $(\alpha, u) \in \Sigma$. Also erhält man wie oben eine zusammenhängende Teilmenge σ von Σ , sodass $\text{Pr}_{\mathbb{R}} \sigma = [\alpha, 0]$. $\Phi(\sigma)$ ist ein Intervall in $\mathbb{R}$. Da wieder $\Phi(\alpha, u) < t$, für alle $(\alpha, u) \in \Sigma$, und $\Phi(0, u) > t$, für alle $(0, u) \in \Sigma$, erhält man eine zweite Lösung $(s_2, u) \in \Sigma$:

$$\Phi(s_2, u) = t, \quad s_2 \in]\alpha, 0[.$$

Wir müssen noch zeigen, dass es eine Konstante $T_1(h_k)$ gibt, sodass (4.2) für $h = te_k + h_k$ mit $t > T_1(h_k)$ keine Lösung besitzt. Da $\Phi(s, u) \rightarrow -\infty$ für $|s| \rightarrow \infty$ und $(s, u) \in \Sigma$, gibt es eine Konstante $c \geq 0$, sodass $\Phi(s, u) \leq 0$ für $|s| \geq c$. Sei nun

$$T_1 := \sup_{|s| \leq c} \{\Phi(s, u)\}, \quad (s, u) \in \Sigma.$$

Dieser Wert ist endlich, da aus Lemma 2.2 mit $\tau = 1$ und $I := [-c, c]$ folgt, dass $\|u\| \leq K$, für alle $(s, u) \in \Sigma$, $|s| \leq c$. Also erfüllt T_1 die Behauptung.

B. Die Gleichung ist in Resonanz bez. eines gegebenen Eigenwertes

Wir betrachten zuerst wieder den Fall, dass $\lambda_k^1 = \lambda_k^2$. Wir erhalten das folgende, mit der Situation beim linearen Randwertproblem in Resonanz vergleichbare Resultat.

4.3. Satz.

Sei a) $\lambda = \lambda_k^1 = \lambda_k^2$,

$$b) \quad \gamma < \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_1, & k = 1, \\ \min \{ \lambda_k - \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1} - \lambda_k \}, & k \geq 2, \end{cases}$$

c) $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $B : H \rightarrow H$ wie in Satz 4.1.c) .

Dann gibt es für jedes $h_k \in H_k$ ein (ev. einpunktiges) Intervall $I(h_k)$, sodass für $h = te_k + h_k$, $t \in I(h_k)$ eine Lösung existiert von

$$(A - \lambda_k^1)u - \gamma u^- + B(u) = h .$$

Beweis: Sei $h_k \in H_k$ gegeben, und seien Σ und Φ gleich definiert wie im Beweis von Satz 4.1. Wir definieren das Intervall $I(h_k)$ folgendermassen:

- falls $a_1 := \limsup_{s \rightarrow -\infty} \Phi(s, u) < \liminf_{s \rightarrow +\infty} \Phi(s, u) =: b_1$,

für $(s, u) \in \Sigma$, sei $I(h_k) :=]a_1, b_1[$.

- falls $a_2 := \liminf_{s \rightarrow -\infty} \Phi(s, u) > \limsup_{s \rightarrow +\infty} \Phi(s, u) =: b_2$.

für $(s, u) \in \Sigma$, sei $I(h_k) :=]b_2, a_2[$.

- falls keiner der beiden obigen Fälle zutrifft, sei

$I(h_k) := \{a_3\}$, wobei $a_3 := \Phi(0, u)$, für ein $(0, u) \in \Sigma$.

Man sieht, dass die Aussage keineswegs scharf ist. Dies hat seinen Grund u.a. darin, dass man keine sinnvolle (d.h. von einer speziellen Lösung der Gleichung unabhängige) notwendige Bedingung für h findet.

Dass das oben definierte Intervall die Behauptung erfüllt, sieht man wie folgt: Es treffe z.B. der erste Fall zu. Es sei ein $t \in I$ gegeben. Wir können nun wieder α und β so bestimmen, dass

$\Phi(\alpha, u) > t$, für alle $(\alpha, u) \in \Sigma$, und

$\Phi(\beta, u) < t$, für alle $(\beta, u) \in \Sigma$.

Daraus schliesst man wie in Satz 4.1 auf die Existenz einer Lösung. Der zweite Fall wird gleich behandelt, während beim dritten Fall nichts zu zeigen ist.

Wir behandeln noch den Fall $\lambda_k^1 \neq \lambda_k^2$. Hier hat man anders als im linearen Fall noch für $h = te_k + h_k$, wobei t aus einer unbeschränkten Menge (genauer einer "Halbgeraden") stammen kann, eine Lösung.

4.4. Satz.

- Sei a) $\lambda = \lambda_k^1 < \lambda_k^2$, oder $\lambda = \lambda_k^2 > \lambda_k^1$.
 b) $\gamma < \begin{cases} \lambda_2 - \lambda_1, & k = 1, \\ \min \{ \lambda_k - \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1} - \lambda_k \}, & k \geq 2, \end{cases}$
 c) $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $B : H \rightarrow H$ wie in Satz 4.1.c).

Dann existiert für jedes $h_k \in H_k$ eine Konstante $T(h_k)$, sodass für $h = te_k + h_k$, $t < T(h_k)$, mindestens eine Lösung existiert von

$$(A - \lambda)u - \gamma u^- + B(u) = h.$$

Beweis: Sei $h_k \in H_k$ gegeben, und seien Σ und Φ gleich definiert wie im Beweis von Satz 4.1.

i) $\lambda = \lambda_k^1 < \lambda_k^2$. Wir zeigen: Für $s \rightarrow -\infty$ gilt $\Phi(s, u) \rightarrow -\infty$, $(s, u) \in \Sigma$. Aus der Annahme $\Phi(s_n, u_n) \geq -c$, für eine Folge $s_n \rightarrow -\infty$, erhält man wie in (4.12): $0 \leq -\Gamma_-(\lambda_k^1)$. Es ist aber $\Gamma_-(\lambda_k^1) > 0$, da $\lambda_k \leq \lambda_k^1 < \lambda_k^2$, und da $\Gamma_-(\lambda_k) > 0$ und λ_k^2 die einzige Nullstelle von Γ_- ist. Nun gehen wir vor wie im Beweis von Fall 2 in Satz 4.2.

Wie dort erhält man $\phi(0,u) \geq -c$, für alle $(0,u) \in \Sigma$. Wir wählen $T := \inf \{ \phi(0,u) / (0,u) \in \Sigma \}$. Dieses T erfüllt die Behauptung, denn für $t < T$ erhält man: Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}^-$, sodass $\phi(\alpha,u) < t$, für alle $(\alpha,u) \in \Sigma$, und es ist $\phi(0,u) > t$, für alle $(0,u) \in \Sigma$. Nun schliesst man wie im erwähnten Beweis auf die Existenz eines Wertes $s \in]\alpha, 0[$, sodass $\phi(s,u) = t$, $(s,u) \in \Sigma$.

ii) $\lambda = \lambda_k^2 > \lambda_k^1$. Für $s \rightarrow +\infty$ gilt $\phi(s,u) \rightarrow -\infty$, $(s,u) \in \Sigma$, denn aus $\phi(s_n, u_n) \geq -c$, für $s_n \rightarrow +\infty$ folgt $\Gamma(\lambda_k) \geq 0$. Sei $\lambda_k + \gamma < \eta < \lambda_{k+1}$. Dann ist $\Gamma(\eta) < 0$, also auch $\Gamma(\lambda_k^2) < 0$, da $\lambda_k^1 < \lambda_k^2 < \eta$ und λ_k^1 einzige Nullstelle von Γ ist: Widerspruch. Sei wieder $T := \inf \{ \phi(0,u) / (0,u) \in \Sigma \}$. Dann gilt für $t < T$: Es existiert ein $\beta \in \mathbb{R}^+$ mit $\phi(\beta,u) < t$, für alle $(\beta,u) \in \Sigma$, und $\phi(0,u) > t$, für alle $(0,u) \in \Sigma$. Also existiert ein $s \in]0, \beta[$, sodass $\phi(s,u) = t$, $(s,u) \in \Sigma$.

C. Ein Resultat von E. Podolak

Wir vergleichen die obigen Sätze mit der in der Einleitung erwähnten Arbeit von Podolak [7]. Das Resultat von Podolak lautet folgendermassen:

$$(4.17) \quad \begin{cases} \Delta u - \lambda_k u + g(u) = h & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

wobei die folgenden Bedingungen erfüllt seien:

$$a) \quad \dim \text{Ker}(A - \lambda_k) = 1,$$

$$b) \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\varepsilon(t)}{t} = \varepsilon > 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\varepsilon(t)}{t} = -\varepsilon < 0,$$

$$\text{und } |g'(t)| \leq \varepsilon,$$

$$c) \int_{\Omega} |e_k| e_k dx > 0.$$

Dann gilt: Falls ε genügend klein ist, existiert eine Konstante $T = T(P_k h)$, sodass (4.17) für $(h, e_k) > T$ keine Lösung besitzt, und für $(h, e_k) < T$ mindestens zwei Lösungen besitzt.

In unserer Notation hat die (4.17) zugeordnete Operatorgleichung die folgende Form:

$$(4.18) \quad Au - (\lambda_k + \varepsilon)u - 2\varepsilon u^- + B(u) = 0.$$

Das obige Resultat sagt, dass ein Ambrosetti-Prodi Resultat gilt, falls der k -te Eigenwert um ein ε übersprungen wird, und falls die k -te Eigenfunktion c) erfüllt. Die Bedingung c) ist z.B. für den gewöhnlichen Differentialoperator $A := -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ auf $(0, \pi)$ für die Eigenfunktionen $\sin(2nx)$ nicht erfüllt, denn $\int_0^\pi |\sin(2nx)| \sin(2nx) dx = 0$ (vgl. die ausführliche Behandlung der gewöhnlichen Differentialgleichung in Paragraph 6). Andererseits zeigen unsere Ergebnisse, dass das Resultat von Podolak nur eintreffen kann, falls der entsprechende Ambrosetti-Prodi Bereich nicht leer ist. Wir zeigen in der folgenden Proposition, dass c) dies impliziert, sofern ε genügend klein ist.

4.5. Proposition. Sei $2\varepsilon = \gamma < \max \{ \lambda_{k+1} - \lambda_k, \lambda_k - \lambda_{k-1} \}, k \geq 2,$

$$\text{und } \int_{\Omega} |e_k| e_k dx \neq 0.$$

Dann gilt für den gespaltenen Eigenwert $(\lambda_k^1, \lambda_k^2)$:

Für γ genügend klein ist $\lambda_k^1 \neq \lambda_k^2$.

Beweis: Wir wissen, dass die folgenden Gleichungen Lösungen $x, y \in H_k$ besitzen:

$$(A - \lambda_k^1)(e_k + x) - \gamma(e_k + x)^- = 0 ,$$

$$(A - \lambda_k^2)(-e_k + y) - \gamma(-e_k + y)^- = 0 .$$

Wir wollen zeigen, dass für γ genügend klein gelten muss: $\lambda_k^1(\gamma) \neq \lambda_k^2(\gamma)$. Wir treffen die Gegenannahme: Es existiere eine Folge (γ_n) , $\gamma_n \rightarrow 0$, sodass

$$\lambda_k^1(\gamma_n) = \lambda_k^2(\gamma_n) , \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Gemäss Satz 2.5 gilt: $\lambda_k^1(\gamma_n) \in [\lambda_k, \lambda_k + \gamma_n]$, also folgt $\lambda_k^1(\gamma_n) = \lambda_k^2(\gamma_n) \rightarrow \lambda_k$. Man hat die folgenden Gleichungen:

$$(4.19) \quad (A - \lambda_k^1(\gamma_n))(e_k + x_n) - \gamma_n(e_k + x_n)^- = 0 ,$$

$$(4.20) \quad (A - \lambda_k^2(\gamma_n))(-e_k + y_n) - \gamma_n(-e_k + y_n)^- = 0 .$$

Es gilt für $n \rightarrow \infty$: $x_n \rightarrow 0$, $y_n \rightarrow 0$. Wir zeigen dies für (x_n) : Es ist $\|x_n\| \leq c$, für alle $n \in \mathbb{N}$, denn sonst hätte man

$$(A - \lambda_k^1(\gamma_n)) \frac{e_k + x_n}{\|x_n\|} - \gamma_n \left(\frac{e_k + x_n}{\|x_n\|} \right)^- = 0 .$$

Wie auf Seite 15f erhält man hieraus

$$(A - \lambda_k) \bar{x} = 0 , \quad \bar{x} := \lim \frac{e_k + x_n}{\|x_n\|} \in H_k .$$

Dies ist unmöglich, und somit ist $\|x_n\| \leq c$. Aus

$$x_n = (A - \lambda_k)^{-1}((\lambda_k^1(\gamma_n) - \lambda_k)x_n + P_k \gamma_n(e_k + x_n)^-)$$

folgt nun die Behauptung, da $\lambda_k^1(\gamma_n) - \lambda_k \rightarrow 0$, $\gamma_n \rightarrow 0$.

Nun addieren wir (4.19) und (4.20):

$$(A - \lambda_k^1(\gamma_n))(x_n + y_n) - \gamma_n(e_k + x_n)^- - \gamma_n(-e_k + y_n)^- = 0.$$

Skalare Multiplikation mit e_k ergibt

$$-\gamma_n((e_k + x_n)^- + (-e_k + y_n)^-, e_k) = 0.$$

Wir können durch γ_n dividieren und erhalten durch Grenzübergang

$$-((e_k)^- + (-e_k)^-, e_k) = -\int_{\Omega} |e_k| e_k \, dx = 0.$$

Dieser Widerspruch zur Voraussetzung beweist die Proposition.

D. Die Gleichung $(A - \lambda)u + \gamma u^+ + B(u) = h$

Alle Resultate für die Gleichung $(A - \lambda)u - \gamma u^- + B(u) = h$ gelten in analoger Weise für die Gleichung $(A - \lambda)u + \gamma u^+ + B(u) = h$, wie leicht ersichtlich ist. Speziell gilt für die Eigenfunktionen $v_k^i := e_k + u^i$ ($i = 1, 2$) von $(A - \lambda_k^i)v_k^i - \gamma(v_k^i)^- = 0$:

4.6. Proposition.

v_k^i ist Lösung von $(A - \lambda_k^i)v_k^i - \gamma(v_k^i)^- = 0$, $i = 1, 2$,

genau dann, wenn

$$-v_k^i \text{ Lösung ist von } (A - \lambda_k^i)(-v_k^i) + \gamma(-v_k^i)^+ = 0, i=1,2.$$

Die gespaltenen Eigenwerte $(\lambda_k^1, \lambda_k^2)$ von $A - \gamma(\)^-$ sind also gleich den gespaltenen Eigenwerten von $A + \gamma(\)^+$.

Beweis: $(A - \lambda_k^i)v_k^i - \gamma(v_k^i)^- = 0$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda_k^i)(-v_k^i) + \gamma(v_k^i)^- = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda_k^i)(-v_k^i) + \gamma(-v_k^i)^+ = 0, (i = 1, 2).$$

5. Nichtlineare Fredholmalternative

Man spricht von einer nichtlinearen Fredholm-Alternative, falls für einen (nicht-) linearen Operator $F : H \rightarrow H$ und asymptotisch sublineare Störungen $B : H \rightarrow H$ gilt:

Entweder besitzt $F(u) = 0$ nur die triviale Lösung,

dann ist $F(u) + B(u) = h$ für alle $h \in H$ lösbar;

oder $F(u) = 0$ besitzt nichttriviale Lösungen,

dann ist $F(u) + B(u) = h$ nur für solche $h \in H$ lösbar, die eine gewisse Bedingung erfüllen.

Unsere Sätze in Paragraph 2 bis 4 kann man nun tatsächlich in diesem Sinne interpretieren, wobei für den Fall $\lambda_k^1 \neq \lambda_k^2$ eine interessante Modifikation des genannten Prinzips auftritt.

5.1. Satz. Sei $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$, $\lambda_k^1 = \lambda_k^2$, und die Voraussetzungen b) und c) von Satz 4.1 seien erfüllt. Dann gilt:

Entweder hat

(5.1) $(A - \lambda)u - \gamma u^- = 0$ nur die triviale Lösung,
dann ist

(5.2) $(A - \lambda)u - \gamma u^- + B(u) = h$ für alle $h \in H$ lösbar;

oder (5.1) hat nichttriviale Lösungen,

dann ist (5.2) nur für jene $h = te_k + h_k$ lösbar,
für die $t \in I(h_k)$. (vgl. Satz 4.3)

Beweis: Falls (5.1) nur die triviale Lösung besitzt, ist $\lambda \neq \lambda_k^1 = \lambda_k^2$. Aus Satz 4.1 folgt die Behauptung. Falls (5.1) eine nichttriviale Lösung besitzt, ist $\lambda = \lambda_k^1 = \lambda_k^2$.

Die Behauptung folgt somit aus Satz 4.3.

Wir betrachten nun den Fall, dass $(\lambda_k^1, \lambda_k^2)$ tatsächlich gespalten ist, d.h. dass gilt $\lambda_k^1 < \lambda_k^2$.

5.2. Satz. Sei $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[$, $\lambda_k^1 < \lambda_k^2$, und die Voraussetzungen b) und c) von Satz 4.1 seien erfüllt. Dann gilt:

Entweder hat (5.1) nur die triviale Lösung, dann gilt

entweder ist (5.2) für alle $h \in H$ lösbar,

oder (5.2) hat für $h = t e_k + h_k$ mit $t < T(h_k)$ mindestens zwei Lösungen und für $t > T_1(h_k)$ keine Lösung.

Oder (5.1) hat nichttriviale Lösungen, dann hat

(5.2) für $h = t e_k + h_k$ mit $t < T(h_k)$ mindestens eine Lösung.

Beweis: Falls (5.1) nur die triviale Lösung besitzt, so ist entweder $\lambda \in [\lambda_k, \lambda_{k+1}[\setminus [\lambda_k^1, \lambda_k^2]$ oder $\lambda \in]\lambda_k^1, \lambda_k^2[$. Die Behauptung folgt aus Satz 4.2. Falls (5.1) nichttriviale Lösungen hat, so ist entweder $\lambda = \lambda_k^1$ oder $\lambda = \lambda_k^2$. Die Behauptung folgt aus Satz 4.4.

Kurz gesagt wird also der Eigenwert λ_k des linearen Operators A durch die Störung $-\gamma(\cdot)^{-}$ in den gespaltenen Eigenwert $(\lambda_k^1, \lambda_k^2)$ überführt. In Proposition 4.5 haben wir gezeigt, dass tatsächlich gilt: $\lambda_k^1 + \lambda_k$ ($i = 1, 2$) für $\gamma \neq 0$. Ausserhalb des Intervalls $[\lambda_k^1, \lambda_k^2]$ gilt die normale Fredholm-Alternative, innerhalb dieses Intervalls erhält man nicht für alle $h \in H$ Lösungen, dafür aber für gewisse $h \in H$ mindestens zwei Lösungen.

6. Die gewöhnliche Differentialgleichung

Für die gewöhnliche Differentialgleichung kann man die Resultate von Paragraph 2 bis 5 auf beliebige $\gamma > 0$ erweitern. Dazu benützen wir Ergebnisse von Fučík [3], mit deren Hilfe man die gespaltenen Eigenwerte berechnen kann. Besonders wichtig ist dabei, dass man die Eindeutigkeit der gespaltenen Eigenwerte erhält. Damit sich diese Ergebnisse in unseren Rahmen einfügen, passen wir die Definition der gespaltenen Eigenwerte dieser Situation an.

6.1. Definition. Ein Paar $(\lambda_k^1, \lambda_k^2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ heisst k -ter gespaltenen Eigenwert von $A - \gamma(\)^- := -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \gamma(\)^-$: $H \supset D(A) \rightarrow H$, $H := L^2(0, \pi)$, $D(A) := H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi)$, falls nichttriviale Lösungen von

$$(6.1) \quad A v_k^1 - \gamma(v_k^1)^- = \lambda_k^1 v_k^1, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(6.2) \quad A v_k^2 - \gamma(v_k^2)^- = \lambda_k^2 v_k^2$$

existieren, und falls die zugehörigen Eigenfunktionen v_k^1 und v_k^2 das Vorzeichen genau $(k-1)$ mal wechseln.

Mit Hilfe dieser Definition können wir nun die Resultate von Fučík folgendermassen formulieren.

6.2. Satz.

(a) Für $k \geq 2$ gerade ist $\lambda_k^1 = \lambda_k^2$, wobei $\lambda_k^1 \geq \gamma + 1$ ($i = 1, 2$) die eindeutige Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$(6.3) \quad \frac{k}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda - \gamma}} \right) = 1.$$

(b) Für $k \geq 1$ ungerade ist λ_k^1 die eindeutige Lösung der folgenden Gleichung, wobei $\lambda_1^1 = 1$, $\lambda_k^1 \geq \gamma + 1$ ($k \geq 3$),

$$(6.4) \quad \frac{k-1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda-\gamma}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1.$$

$\lambda_k^2 \geq \gamma + 1$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung

$$(6.5) \quad \frac{k-1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda-\gamma}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda-\gamma}} = 1.$$

Beweis: (Fučík). Aus dem Eindeutigkeits-Satz für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt, dass eine Lösung u von

$$(A - \lambda)u - \gamma \cdot u^- = 0$$

endlich viele Nullstellen hat im Intervall $]0, \pi[$.

(i) Falls u keine Nullstellen hat im Intervall $]0, \pi[$, ist $u = r \cdot \sin x$, $r > 0$, oder $u = -r \cdot \sin x$; denn es gilt entweder $-(\sin x)'' - \gamma(\sin x)^- = \sin x$, da $(\sin x)^- = 0$, oder $-(-\sin x)'' - \gamma(-\sin x)^- = (1 + \gamma)(-\sin x)$. Im ersten Fall ist also $\lambda_1^1 = 1$, und dies ist die Lösung von (6.4) für $k = 1$. Im zweiten Fall folgt $\lambda_1^2 = 1 + \gamma$; dies ist die Lösung von (6.5) für $k = 1$, denn $\frac{1}{\sqrt{1+\gamma}} = 1$.

(ii) Falls u Nullstellen hat in $]0, \pi[$, so ist auf einem (maximalen) Intervall I^+ , wo u positiv ist (o.B. d.A. $I^+ =]0, \alpha[$): $u(x) = r \cdot \sin \sqrt{\lambda} x$, $r > 0$, und analog auf $I^- =]0, \beta[$: $u(x) = -s \cdot \sin \sqrt{\lambda - \gamma} x$, $s > 0$, denn

$$-(-\sin \sqrt{\lambda - \gamma} x)'' - \gamma(-\sin \sqrt{\lambda - \gamma} x)^- =$$

$$= -(\lambda - \gamma) \sin \sqrt{\lambda - \gamma} x - \gamma \sin \sqrt{\lambda - \gamma} x = \lambda (-\sin \sqrt{\lambda - \gamma} x) .$$

Somit ist die Länge eines Intervalls, wo u positiv ist:

$$\ell(I^+) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} , \quad \text{und analog} \quad \ell(I^-) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - \gamma}} .$$

Für die Länge des ganzen Intervalls erhält man somit eine der folgenden Formeln:

$$n \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - \gamma}} \right) = \pi , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - \gamma}} \right) + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} = \pi , \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n \left(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - \gamma}} \right) + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda - \gamma}} = \pi , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Wenn man nun den Faktor n wie in (6.3) - (6.5) wählt, erhält man als Lösungen dieser Gleichungen die gespaltenen Eigenwerte $(\lambda_k^1, \lambda_k^2)$. Ausser λ_1^1 sind diese Lösungen grösser als $\gamma + 1$, da sonst schon $\frac{1}{\sqrt{\lambda - \gamma}} > \frac{1}{\sqrt{\gamma + 1 - \gamma}} = 1$ wäre. Die Lösungen sind eindeutig, da für $\lambda \geq \gamma + 1$ die Funktionen $\frac{k}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda - \gamma}} \right)$, etc., strikt monoton fallend sind.

Wir haben gezeigt, dass jeder gesplattene Eigenwert Lösungen der obigen Formeln darstellt. Umgekehrt kann zu jeder Lösung λ einer dieser Formeln eine nichttriviale Lösung von $Au - \gamma(u)^- = \lambda u$ konstruiert werden, wie leicht zu sehen ist.

Mit Hilfe dieser Formeln erhalten wir die folgenden Aussagen über das "Spektrum" des Operators $A - \gamma(\)^-$:

6.3. Satz. Die gespaltenen Eigenwerte des Operators $A - \gamma(\)^- : L^2(0, \pi) \supset D(A) \rightarrow L^2(0, \pi)$ bilden die Folge

$$0 < \lambda_1^1 < \lambda_1^2 < \lambda_2^1 = \lambda_2^2 < \lambda_3^1 < \lambda_3^2 < \lambda_4^1 = \lambda_4^2 < \dots ,$$

und ∞ ist der einzige Häufungspunkt dieser Folge.

Ferner gilt: $\lambda_k^i \geq \lambda_k$, $i = 1, 2$, und $\lambda_k^i(\gamma) + \lambda_k$, $\gamma \neq 0$.

Beweis:

Aus Satz 6.2 folgt $\lambda_k^1 < \lambda_k^2$ für k ungerade, und $\lambda_k^1 = \lambda_k^2$ für k gerade. Wir zeigen $\lambda_k^2 < \lambda_{k+1}^1$, für alle $k \in \mathbb{N}$.

Dazu nehmen wir an, es existiere ein $k \in \mathbb{N}$, sodass gilt $\lambda_k^2 \geq \lambda_{k+1}^1$. Zuerst sei k ungerade. Dann genügt λ_k^2 der Gleichung (6.5) und λ_{k+1}^1 der Gleichung (6.3). Aus unserer Annahme folgt somit aus

$$\frac{k+1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}^1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}^1 - \gamma}} \right) = 1$$

die Ungleichung

$$\frac{k+1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2 - \gamma}} \right) \leq 1 .$$

Dies schreiben wir folgendermassen:

$$\frac{k-1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2 - \gamma}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2 - \gamma}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2}} \leq 1 .$$

Da $\frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2}} > 0$, ergibt sich ein Widerspruch zu Gleichung (6.5).

Nun sei k gerade. Dann genügt λ_k^2 (6.3) und λ_{k+1}^1 (6.4).

Aus der Annahme $\lambda_k^2 \geq \lambda_{k+1}^1$ folgt mit

$$\frac{k+1-1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}^1}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}^1 - \gamma}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k+1}^1}} = 1$$

die Ungleichung

$$\frac{k}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2 - \gamma}} \right) + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^2}} \leq 1,$$

was einen Widerspruch zu (6.3) ergibt.

Als nächstes zeigen wir, dass $\lambda_k^i \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$, $i=1,2$.

Wir nehmen an, es sei $\lambda_k^i \leq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $i=1,2$.

Daraus folgt $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k^i}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^i - \gamma}} \right) \geq \bar{c} > 0$. Somit ergibt sich

$$\frac{k-1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k^i}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k^i - \gamma}} \right) \rightarrow \infty, \text{ für } k \rightarrow \infty$$

Aus (6.3) - (6.5) folgt jedoch, dass dieser Ausdruck beschränkt ist durch 1.

Die letzten beiden Aussagen erhalten wir mit folgender Überlegung: Die Eigenwerte λ_k des linearen Operators A ergeben sich aus den Gleichungen (6.3) - (6.5), indem man $\gamma = 0$ setzt, wobei dann die Gleichungen (6.4) und (6.5) zusammenfallen. Durch $\gamma > 0$ werden die Terme $\frac{1}{\sqrt{\lambda - \gamma}}$ vergrößert, was durch eine Vergrößerung von λ kompensiert werden muss; also ist $\lambda_k^i \geq \lambda_k$, $i = 1, 2$. Aus der Eindeutigkeit folgt sofort, dass $\lambda_k^i(\gamma) \rightarrow \lambda_k$ für $\gamma \rightarrow 0$, $i=1,2$.

Wir zeigen nun, dass für $\lambda \in]\lambda_k^2, \lambda_{k+1}^1[$ die Gleichung

$$(A - \lambda)u - \gamma \cdot u^- + B(u) = h$$

für beliebige $\gamma > 0$ für alle $h \in H$ mindestens eine Lösung besitzt. Dabei gelte für die Störung $B: H \rightarrow H$:

$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{\|Bu\|}{\|u\|} \rightarrow 0$ für $\|u\| \rightarrow \infty$. Zur Vorbereitung beweisen wir

6.4. Proposition. Sei $\lambda \in]\lambda_k^2, \lambda_{k+1}^1[$.

Dann existiert ein $\mu \in]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ sodass für den folgenden Leray - Schauder'schen Abbildungsgrad gilt:

$$(6.6) \quad \deg(I + (A - \mu)^{-1}((\mu - \lambda)I - \gamma(\cdot)^-), B(1), 0) = 1.$$

Beweis: Wir schreiben für $\lambda \in]\lambda_k^2, \lambda_{k+1}^1[$:

$$\lambda = t\lambda_k^2 + (1-t)\lambda_{k+1}^1, \quad t \in]0, 1[. \quad \text{Nun setzen wir}$$

$$\mu := t\lambda_k + (1-t)\lambda_{k+1}, \quad \text{und definieren für } \beta \in [0, \gamma]:$$

$\zeta(\beta) := t\lambda_k^2(\beta) + (1-t)\lambda_{k+1}^1(\beta)$. Da λ_k^2 und λ_{k+1}^1 stetig abhängen von β , ist also ζ stetig in β . Wir definieren die folgende Homotopie

$$H: \overline{B(1)} \times [0, \gamma] \rightarrow H$$

$$(x, \beta) \mapsto x + (A - \mu)^{-1}((\mu - \zeta(\beta))x - \beta \cdot x^-).$$

Man beachte, dass $(A - \mu)^{-1}$ kompakt ist, und dass

$(\mu - \zeta(\beta))I - \beta(\cdot)^-$ stetig ist in x und β .

Wir zeigen, dass $H(x, \beta) \neq 0$ für alle $(x, \beta) \in \partial B(1) \times [0, \gamma]$. Dazu nehmen wir an, es existiere ein $(x, \beta) \in \partial B(1) \times [0, \gamma]$, sodass $H(x, \beta) = 0$. Dann folgt

$$(A - \mu)x + (\mu - \zeta(\beta))x - \beta \cdot x^- = 0.$$

Da aber $\zeta(\beta) \in]\lambda_k^2(\beta), \lambda_{k+1}^1(\beta)[$, ist dies unmöglich. Da $\mu - \zeta(0) = 0$ infolge von Satz 6.3, ist die Abbildung

$$I + (A - \mu)^{-1}((\mu - \zeta(\beta))I - \gamma(\beta)^-)$$

homotop zur Identität auf $\partial B(1)$, und somit folgt die Behauptung.

Damit folgt nun

6.5. Satz. $\lambda \in]\lambda_k^2, \lambda_{k+1}^1[$.

Sei $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, mit $|b(s)| \leq c(|s|^\alpha + 1)$, $0 \leq \alpha < 1$, und sei B der durch b induzierte Nemytskii-Operator.

Dann hat die Gleichung $(A - \lambda)u - \gamma \cdot u^- + B(u) = h$ für jedes $h \in H$ mindestens eine Lösung.

Beweis: Wir beweisen die Existenz eines $R > 0$, sodass

$$\deg(I + (A - \mu)^{-1}((\mu - \lambda)I - \gamma(\cdot)^- + B - h), B(R), 0) = 1,$$

wo μ wie in Proposition 6.4 ist.

Wir betrachten die folgende Homotopie, wobei wir

$$F := I + (A - \mu)^{-1}((\mu - \lambda)I - \gamma(\cdot)^-)$$
 setzen:

$$K : \overline{B(R)} \times [0, 1] \rightarrow H$$

$$(x, t) \mapsto Fx + t(A - \mu)^{-1}(B(x) - h).$$

Wir müssen zeigen, dass ein $R > 0$ existiert, sodass auf

$$\partial B(R) \times [0, 1] \text{ gilt: } K(x, t) \neq 0.$$

Wir nehmen an, es existiere eine Folge $R_n \rightarrow \infty$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in \partial B(R_n)$ und ein $t_n \in [0,1]$ existiert mit $K(x_n, t_n) = 0$. Somit ist

$$Fx_n + t_n(A - \mu)^{-1}(B(x_n) - h) = 0, \text{ und weiter}$$

$$(A - \lambda)x_n - \gamma(x_n)^- + t_n(B(x_n) - h) = 0.$$

Wir dividieren diese Gleichung durch $\|x_n\|$ und setzen

$$\bar{x}_n := \frac{x_n}{\|x_n\|} \text{ und erhalten:}$$

$$(A - \lambda)\bar{x}_n - \gamma(\bar{x}_n)^- + t_n \frac{B(\bar{x}_n) - h}{\|\bar{x}_n\|} = 0.$$

Hieraus folgt $(A\bar{x}_n, \bar{x}_n) \leq 0$, und somit findet man eine konvergente Teilfolge $\bar{x}_n \rightarrow \bar{x}$ in H , $\|\bar{x}\| = 1$. Aus

$$\bar{x}_n = A^{-1}(\lambda\bar{x}_n + \gamma(\bar{x}_n)^- - t_n \frac{B(\bar{x}_n) - h}{\|\bar{x}_n\|})$$

folgt durch Limesübergang $n \rightarrow \infty$

$$\bar{x} = A^{-1}(\lambda\bar{x} + \gamma(\bar{x})^-) \quad \text{und somit}$$

$$A\bar{x} - \lambda\bar{x} - \gamma(\bar{x})^- = 0.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass (6.6) gilt, und somit ist der Satz bewiesen.

Nun betrachten wir noch den Fall $\lambda \in [\lambda_k^1, \lambda_k^2]$. Damit $\lambda_k^1 \neq \lambda_k^2$ ist, muss nach Satz 6.3 k ungerade sein. Wir betrachten nur den Fall $k \geq 3$ (für $k = 1$ vgl. [4]).

Wir wissen , dass für jedes λ gilt:

$$(A - \lambda)v_k^1 - \gamma(v_k^1)^- = (\lambda_k^1 - \lambda)v_k^1 ,$$

wobei v_k^1 die Eigenfunktion zum Eigenwert λ_k^1 bezeichnet.
Für $\gamma = 0$ hat man entsprechend

$$(A - \lambda)e_k = (\lambda_k - \lambda)e_k .$$

Zuerst zeigen wir, dass für $h := (\lambda_k^1 - \lambda)v_k^1$ fest, $\lambda \neq \lambda_k^1$, die Lösung v_k^1 der Gleichung $(A - \lambda)w - \gamma w^- = h$ isoliert ist. Dies folgt aus

6.6. Lemma. Sei $k \geq 3$ ungerade .

(a) Sei $\delta > 0$ so, dass $\bar{\lambda}(\gamma) := \lambda_k^2(\gamma) + \delta < \lambda_{k+1}^1(\gamma)$, für alle $\gamma \in [0, c]$.

Dann existiert ein $\varepsilon_1 > 0$, sodass für alle $w \in H$ mit $0 < \|w - v_k^1(\gamma)\| \leq \varepsilon_1$ und für alle $\gamma \in [0, c]$ gilt:

$$(A - \bar{\lambda}(\gamma))w - \gamma w^- \neq (\lambda_k^1(\gamma) - \bar{\lambda}(\gamma))v_k^1(\gamma) .$$

(b) Sei $\gamma \in [0, c]$ fest. Wir setzen $\lambda_k^i := \lambda_k^i(\gamma)$, $v_k^i := v_k^i(\gamma)$.
und $\bar{\lambda} := \lambda_k^2(\gamma) + \delta$ (δ wie in (a)), $i = 1, 2$. Ferner sei $\underline{\lambda} \in]\lambda_k^1, \lambda_k^2]$ fest gegeben.

Dann existiert ein $\varepsilon_2 > 0$, sodass für alle $w \in H$ mit $0 < \|w - v_k^1\| \leq \varepsilon_2$ und für alle $\lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ gilt:

$$(A - \lambda)w - \gamma w^- \neq (\lambda_k^1 - \lambda)v_k^1 .$$

Beweis:

(a) Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen also an,

für alle $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ existiere ein w_n mit $0 < \|w_n - v_{k,n}\| \leq \frac{1}{n}$ und ein $\gamma_n \in [0, c]$, sodass

$$(A - \lambda_n)w_n - \gamma_n(w_n)^- = (\lambda_{k,n}^1 - \lambda_n)v_{k,n}, \text{ wobei wir } \lambda_{k,n}$$

$:= \lambda_k^1(\gamma_n)$, $\lambda_n := \bar{\lambda}(\gamma_n)$ und $v_{k,n} := v_k^1(\gamma_n)$ gesetzt haben.

Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(A - \lambda_n)v_{k,n} - \gamma_n(v_{k,n})^- = (\lambda_{k,n}^1 - \lambda_n)v_{k,n}.$$

Wir subtrahieren diese Gleichungen voneinander und erhalten

$$(A - \lambda_n)(w_n - v_{k,n}) - \gamma_n((w_n)^- - (v_{k,n})^-) = 0.$$

Division durch $\|w_n - v_{k,n}\|$ führt zu

$$(6.7) \quad (A - \lambda_n) \frac{w_n - v_{k,n}}{\|w_n - v_{k,n}\|} - \gamma_n \frac{(w_n)^- - (v_{k,n})^-}{\|w_n - v_{k,n}\|} = 0.$$

Wir setzen $\bar{y}_n := \frac{w_n - v_{k,n}}{\|w_n - v_{k,n}\|}$. Aus (6.7) folgt

$$(A\bar{y}_n, \bar{y}_n) \leq \lambda_n \|\bar{y}_n\|^2 + \gamma_n \|\bar{y}_n\|^2 \leq \text{const.},$$

wobei wir (2.22) benutzt haben. Somit erhält man also konvergente (Teil-) Folgen

$$\gamma_n \rightarrow \gamma, \quad \lambda_n \rightarrow \bar{\lambda}(\gamma), \quad \bar{y}_n \rightarrow \bar{y} \quad (\|\bar{y}\| = 1), \text{ und}$$

$$v_{k,n} \rightarrow v_k^1(\gamma).$$

Die letzte Aussage folgt aus $(A - \lambda_k^1(\gamma))v_{k,n} - \gamma_n(v_{k,n})^- = 0$: Da $\|v_{k,n}\| = 1$, erhält man $v_{k,n} \rightarrow v$ in H (für eine Teilfolge), und schliesst $v = v_k^1$ (wegen der Eindeutigkeit von v_k^1).

Wir zeigen: Auf $I^+ := \{x \in]0, \pi[\mid (v_k^1)'(x) > 0\}$ gilt:

$$(6.8) \quad \frac{(w_n)^- - (v_{k,n})^-}{\|w_n - v_{k,n}\|} \rightarrow 0 \quad \text{in } L^2(I^+) \quad (n \rightarrow \infty), \quad \text{für eine Teilfolge.}$$

(i) Es existiert eine integrierbare Majorante:

$$\frac{(w_n)^- - (v_{k,n})^-}{\|w_n - v_{k,n}\|^2} \leq \frac{|w_n - v_{k,n}|^2}{\|w_n - v_{k,n}\|^2};$$

dies folgt aus (2.22), da jene Ungleichung natürlich auch für Konstanten gilt.

$$(ii) \quad \frac{|(w_n)^- - (v_{k,n})^-|^2}{\|w_n - v_{k,n}\|^2} \rightarrow 0 \quad \text{punktweise, für eine Teilfolge.}$$

Dies sieht man wie folgt: Da

$$\|v_k^1(\gamma) - w_n\| \leq \|v_k^1(\gamma) - v_{k,n}\| + \|v_{k,n} - w_n\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

existiert eine Teilfolge, sodass

$$w_n \rightarrow v_k^1(\gamma) \quad , \quad \text{punktweise in }]0, \pi[.$$

Ferner gilt (für eine Teilfolge):

$$v_{k,n} \rightarrow v_k^1(\gamma), \quad \text{punktweise in }]0, \pi[.$$

Also finden wir ein $N(x) \in \mathbb{N}$, $x \in I^+$, sodass

$$(w_n)^-(x) = 0 \quad , \quad (v_{k,n})^-(x) = 0 \quad , \quad \text{für alle } n \geq N(x).$$

Mit dem Lebesgue'schen Satz von der majorisierten Konvergenz folgt nun die Behauptung (6.8).

Analog folgt, dass auf $I^- := \{x \in]0, \pi[/ (v_k^1(\gamma))(x) < 0\}$

gilt: $\frac{(w_n)^- - (v_{k,n})^-}{\|w_n - v_{k,n}\|} \rightarrow \bar{y}$ in $L^2(I^-)$ ($n \rightarrow \infty$), für eine Teilfolge.

Für $I^0 := \{x \in]0, \pi[/ (v_k^1(\gamma))(x) = 0\}$ gilt ferner $|I^0| = 0$, da $v_k^1(\gamma)$ $k-1$ Nullstellen in $]0, \pi[$ hat. Also folgt

$$\frac{(w_n)^- - (v_{k,n})^-}{\|w_n - v_{k,n}\|} \rightarrow \bar{y} \text{ in } H.$$

Nun schreiben wir (6.7) in folgender äquivalenter Form:

$$\bar{y}_n = A^{-1}(\lambda_n \bar{y}_n + \gamma_n \frac{(w_n)^- - (v_{k,n})^-}{\|w_n - v_{k,n}\|}).$$

Daraus folgt mit $n \rightarrow \infty$: $(A - \bar{\lambda}(\gamma))\bar{y} + \gamma \cdot \bar{y} \cdot \chi_{I^-} = 0$.

Wir schreiben im folgenden: $\bar{\lambda} := \bar{\lambda}(\gamma)$, $\lambda_k^i := \lambda_k^i(\gamma)$ ($i=1,2$).

Aus Satz 6.2 folgt, dass I^- aus $\frac{k-1}{2}$ (maximalen) Intervallen J_i^- ($1 \leq i \leq \frac{k-1}{2}$) der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_k^1 - \gamma}}$ besteht, und I^+ aus $\frac{k+1}{2}$ (maximalen) Intervallen J_j^+ ($1 \leq j \leq \frac{k+1}{2}$) der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_k^1}}$. Es folgt, dass $\bar{y}$ auf jedem Intervall J_i^- und J_j^+ mindestens einmal das Vorzeichen wechselt, denn sonst wäre $i(J_i^-) = -\frac{\pi}{\sqrt{\lambda - \gamma}}$ oder $i(J_j^+) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$, was wegen $\bar{\lambda} \neq \lambda_k^1$ unmöglich ist. Somit gilt $i(J_i^-) = \frac{n_i \pi}{\sqrt{\lambda - \gamma}}$, $n_i \geq 2$, $1 \leq i \leq \frac{k-1}{2}$; $i(J_j^+) = \frac{n_j \pi}{\sqrt{\lambda}}$, $n_j \geq 2$, $1 \leq j \leq \frac{k+1}{2}$. Daraus folgt die Abschätzung

$$(k-1)(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda - \gamma}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}) + 2\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} = \frac{k-1}{2}(\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda - \gamma}} + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}) + \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} < \pi.$$

Dies ist aber unmöglich, denn aus $\lambda_k^1 < \bar{\lambda} < \lambda_{k+1}^1$ und $k \geq 3$ folgt

$$\pi = \frac{k+1}{2}(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_{k+1}^1 - \gamma}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_{k+1}^1}}) \leq (k-1)(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda_{k+1}^1 - \gamma}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda_{k+1}^1}})$$

$$< (k-1)(\frac{\pi}{\sqrt{\lambda - \gamma}} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}) + 2\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}. \quad \text{Also gilt (a).}$$

(b) Indem wir wieder annehmen, es existiere für alle $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ ein $w_n \in H$ mit $0 < \|w_n - v_k^1\| \leq \frac{1}{n}$ und ein $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$, sodass

$$(A - \lambda_n)w_n - \gamma(w_n)^- = (\lambda_k^1 - \lambda_n)v_k^1, \quad ,$$

erhalten wir wie in (a)

$$(A - \lambda_n) \frac{w_n - v_k^1}{\|w_n - v_k^1\|} - \gamma \frac{(w_n)^- - (v_k^1)^-}{\|w_n - v_k^1\|} = 0,$$

und weiter Teilfolgen

$$\lambda_n \rightarrow \lambda \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \quad \text{und} \quad \bar{y}_n := \frac{w_n - v_k^1}{\|w_n - v_k^1\|} \rightarrow \bar{y}, \quad \|\bar{y}\| = 1.$$

Mit dem Satz von Lebesgue erhält man wieder für eine Teilfolge

$$\frac{(w_n)^- - (v_k^1)^-}{\|w_n - v_k^1\|} \rightarrow \bar{y} \cdot \chi_{I^-} \quad \text{in } H \quad (I^- \text{ wie in (a) def.}).$$

Somit folgt durch Grenzübergang

$$(A - \lambda)\bar{y} + \gamma\bar{y} \cdot \chi_{I^-} = 0.$$

Daraus erhält man wie in (a) einen Widerspruch, da $\lambda \neq \lambda_k^1$.

Im folgenden sei $B(r, a) := \{x \in H / \|x - a\| < r\}$.

Es gilt die folgende Proposition:

6.7. Proposition. Sei $\underline{\lambda} \in]\lambda_k^1, \lambda_k^2]$, $\gamma > 0$ fest, $k \geq 3$ ungerade.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\deg(I + A^{-1}(-\underline{\lambda} - \gamma(\)^- - (\lambda_k - \underline{\lambda})v_k^1), B(\varepsilon, v_k^1), 0) = \pm 1.$$

Beweis: Seien $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ und δ wie in Lemma 6.6; wir setzen $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, 1\}$. Man weiss, dass

$$\deg(I + A^{-1}(-(\lambda_k + \delta)I, B(2,0), 0) = \pm 1.$$

Da für alle $(x, t) \in \partial B(2,0) \times [0,1]$ gilt

$$x + A^{-1}(-(\lambda_k + \delta)x) + tA^{-1}(\delta e_k) \neq 0$$

(denn sonst wäre $(A - \lambda_k - \delta)x = -t(\delta e_k)$; die einzige Lösung dieser Gleichung ist aber $x = te_k$ mit $\|te_k\| \leq 1$), folgt wegen Homotopie-Invarianz

$$\deg(I + A^{-1}(-(\lambda_k + \delta)I + \delta e_k), B(2,0), 0) = \pm 1.$$

Wiederum wegen der Eindeutigkeit der Lösung e_k von $(A - \lambda_k - \delta)e_k = -\delta e_k$ ergibt sich mit Hilfe der Exzisions-Eigenschaft des Abbildungsgrades

$$(6.9) \quad \deg(I + A^{-1}(-(\lambda_k + \delta)I + \delta e_k), B(\varepsilon, e_k), 0) = \pm 1.$$

Infolge Lemma 6.6 können wir nun diese Aussage wieder auf beliebige $\gamma > 0$ ausdehnen. Dazu definieren wir die folgende Homotopie:

$$H : \overline{B(\varepsilon, e_k)} \times [0, \gamma] \rightarrow H$$

$$(x, \beta) \mapsto p_\beta(x) + A^{-1}(-\bar{\lambda}(\beta)p_\beta(x) - \beta(p_\beta(x)) - (\lambda_k^1(\beta) - \bar{\lambda}(\beta))v_k^1(\beta)),$$

$$\text{wobei } \bar{\lambda}(\beta) := \lambda_k^2(\beta) + \delta, \quad p_\beta(x) := x + v_k^1(\beta) - e_k.$$

Es ist $H(x, \beta) \neq 0$ für alle $(x, \beta) \in \partial B(\varepsilon, e_k) \times [0, \gamma]$,

denn sonst wäre

$$Ap_{\beta}(x) - \bar{\lambda}(\beta)p_{\beta}(x) - \gamma(p_{\beta}(x))^{-} = (\lambda_k^1(\beta) - \bar{\lambda}(\beta))v_k^1(\beta);$$

es ist aber $\|p_{\beta}(x) - v_k^1(\beta)\| = \|x - e_k\| = \varepsilon$, d.h. die obige Gleichung steht im Widerspruch zu Lemma 6.6.(a).

Da sich mit $\beta = 0$ (6.9) ergibt, können wir mit Hilfe der Homotopie-Invarianz schliessen, dass für $\beta = \gamma$ gilt:

$$\begin{aligned} \pm 1 &= \deg(I + A^{-1}[-\bar{\lambda}(\gamma) - \gamma(\)^{-} - (\lambda_k^1(\gamma) - \bar{\lambda}(\gamma))v_k^1(\gamma)], p_{\gamma}(B(\varepsilon, e_k)), 0) \\ &= \deg(I + A^{-1}[-\bar{\lambda}(\gamma) - \gamma(\)^{-} - (\lambda_k^1(\gamma) - \bar{\lambda}(\gamma))v_k^1(\gamma)], B(\varepsilon, v_k^1(\gamma)), 0). \end{aligned}$$

Diese Aussage wollen wir nun mit einer weiteren Homotopie auf ein beliebiges $\underline{\lambda} \in [\lambda_k^1, \lambda_k^2]$ transportieren. Da wir im folgenden γ fest halten, setzen wir wieder

$$\lambda_k^i := \lambda_k^i(\gamma), \quad v_k^i := v_k^i(\gamma), \quad (i=1,2), \quad \text{und} \quad \bar{\lambda} := \bar{\lambda}(\gamma).$$

Sei also

$$K : \overline{B(\varepsilon, v_k^1)} \times [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \rightarrow H$$

$$(x, \lambda) \mapsto x + A^{-1}(-\lambda x - \gamma x^{-} - (\lambda_k^1 - \lambda)v_k^1).$$

Aus Lemma 6.6.(b) ergibt sich wiederum

$$K(x, \lambda) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad (x, \lambda) \in \partial B(\varepsilon, v_k^1) \times [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}].$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \pm 1 &= \deg(I + A^{-1}(-\bar{\lambda} - \gamma(\)^{-} - (\lambda_k^1 - \bar{\lambda})v_k^1), B(\varepsilon, v_k^1), 0) \\ &= \deg(I + A^{-1}(-\underline{\lambda} - \gamma(\)^{-} - (\lambda_k^1 - \underline{\lambda})v_k^1), B(\varepsilon, v_k^1), 0). \end{aligned}$$

Analog zu Proposition 6.7 gilt auch

6.8. Proposition. Sei $\tilde{\lambda} \in [\lambda_k^1, \lambda_k^2[$, $\gamma > 0$ fest, $k \geq 3$ ungerade.

Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass

$$\deg(I + A^{-1}(-\tilde{\lambda} - \gamma(\)) - (\lambda_k^2 - \tilde{\lambda})v_k^2), B(\varepsilon, v_k^2), 0) = \pm 1.$$

Der Beweis sei nur skizziert. Zuerst finden wir Aussagen analog zu Lemma 6.6:

(a) Sei $\delta > 0$ so, dass $\underline{\lambda}(\gamma) := \lambda_k^1(\gamma) - \delta > \lambda_{k-1}^2(\gamma)$, für alle $\gamma \in [0, c]$.

Dann existiert ein $\varepsilon_1 > 0$, sodass für alle $w \in H$ mit $0 < \|w - v_k^2(\gamma)\| \leq \varepsilon_1$ und für alle $\gamma \in [0, c]$ gilt:

$$(A - \underline{\lambda}(\gamma))w - \gamma w^- \neq (\lambda_k^2 - \underline{\lambda}(\gamma))v_k^2(\gamma).$$

(b) Seien $\gamma > 0$, $\underline{\lambda} := \lambda_k^1 - \delta$ und $\tilde{\lambda} \in [\lambda_k^1, \lambda_k^2[$ fest.

Dann existiert ein $\varepsilon_2 > 0$, sodass für alle $w \in H$ mit $0 < \|w - v_k^2\| \leq \varepsilon_2$ und für alle $\lambda \in [\underline{\lambda}, \tilde{\lambda}]$ gilt:

$$(A - \lambda)w - \gamma w^- \neq (\lambda_k^2 - \lambda)v_k^2.$$

Diese Aussagen werden genau wie in Lemma 6.6 gezeigt.

Nun zeigt man wie in Proposition 6.7, dass gilt

$$\begin{aligned} 1 &= \deg(I + A^{-1}(-(\lambda_k^1 - \delta)I + \delta e_k), B(\varepsilon, -e_k), 0) \\ &= \deg(I + A^{-1}(-\underline{\lambda}(\gamma) - \gamma(\)) - (\lambda_k^2(\gamma) - \underline{\lambda}(\gamma))v_k^2(\gamma)), B(\varepsilon, v_k^2(\gamma)), 0) \\ &= \deg(I + A^{-1}(-\tilde{\lambda} - \gamma(\)) - (\lambda_k^2 - \tilde{\lambda})v_k^2), B(\varepsilon, v_k^2), 0). \end{aligned}$$

Damit lässt sich nun der folgende Satz beweisen:

6.9. Satz. Sei $k \geq 3$ ungerade.

(a) Sei $\lambda \in]\lambda_k^1, \lambda_k^2]$, und sei $V_1 := \text{span}\{v_k^1\}$,

$$H =: V_1 \oplus H_1 \quad (\text{orthogonale Summe}).$$

Dann existiert für jedes $h_1 \in H_1$ eine Konstante $T(h_1)$, sodass für $t < T(h_1)$ mindestens eine Lösung existiert von

$$(A - \lambda)x - \gamma x^- + B(x) = tv_k^1 + h_1.$$

(b) Sei $\lambda \in [\lambda_k^1, \lambda_k^2[$, und sei $V_2 := \text{span}\{v_k^2\}$,

$$H =: V_2 \oplus H_2.$$

Dann existiert für jedes $h_2 \in H_2$ eine Konstante $S(h_2)$, sodass für $s > S(h_2)$ mindestens eine Lösung existiert von

$$(A - \lambda)x - \gamma x^- + B(x) = sv_k + h_2.$$

Beweis:

(a) Wir zeigen, dass ein $T(h_1)$ existiert, sodass für

$$t < T(h_1) \quad \text{und} \quad \theta := \frac{t}{\lambda - \lambda_k^1} \quad \text{gilt:}$$

$$\pm 1 = \deg(I + A^{-1}(-\lambda I - \gamma(\cdot)^- + B - h_1 - tv_k^1), B(|\theta|\varepsilon, |\theta|v_k^1), 0).$$

Wir definieren die folgende Homotopie:

$$H : \overline{B(|\theta|\varepsilon, |\theta|v_k^1)} \times [0, 1] \rightarrow H$$

$$(x, \tau) \mapsto x + A^{-1}(-\lambda x - \gamma x^- + \tau(B(x) - h_1) + \theta(\lambda_k^1 - \lambda)v_k^1).$$

Wir nehmen an, es existieren Folgen (θ_n) mit $\theta_n \rightarrow -\infty$ und $((x_n, \tau_n)) \subset \partial B(|\theta_n|\varepsilon, |\theta_n|v_k^1) \times [0, 1]$ derart, dass $H(x_n, \tau_n) = 0$. Division dieser Gleichung durch $|\theta_n|$ und Anwenden von A auf beiden Seiten ergibt

$$(A - \lambda)\bar{x}_n - \gamma(\bar{x}_n)^- + \frac{\tau}{|\theta_n|} (B(|\theta_n|\bar{x}_n) - h_1) = (\lambda_k^1 - \lambda)v_k^1,$$

$$\text{wobei} \quad \bar{x}_n := \frac{x_n}{|\theta_n|} \in \partial B(\varepsilon, v_k^1).$$

Also existiert eine konvergente Teilfolge $\bar{x}_n \rightarrow \bar{x}$ in H ,
 $\bar{x} \in \partial B(\varepsilon, v_k^1)$, und wir erhalten mit $n \rightarrow \infty$:

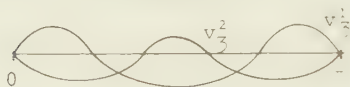
$$(A - \lambda)\bar{x} - \gamma(\bar{x})^- = (\lambda_k^1 - \lambda)v_k^1.$$

Dieser Widerspruch zu Lemma 6.6 (b) beweist unsere Behauptung.

(b) wird analog bewiesen.

6.10. Bemerkung.

Für $k = 3$ hat man z.B.



Falls die Funktion $h \in H$ die Darstellungen

$$h = \alpha v_k^1 + h_1, \quad h_1 \in H_1,$$

$$h = \beta v_k^2 + h_2, \quad h_2 \in H_2$$

hat, und falls für beide Darstellungen Lösungen gemäss Satz 6.9 existieren, so sind diese Lösungen verschieden (falls $|\alpha|$ und $|\beta|$ genügend gross), da die Lösungen in $B(\varepsilon, v_k^1)$ bzw. $B(\varepsilon, v_k^2)$ liegen, und $B(\varepsilon, v_k^1) \cap B(\varepsilon, v_k^2) = \emptyset$ (für ε genügend klein). Man erhält dann also in Übereinstimmung mit dem Ambrosetti-Prodi Resultat zwei Lösungen.

Wir erinnern daran, dass $v_1^1 = e_1$, $v_1^2 = -e_1$. Dann hat also jedes $h \in H$ die Darstellungen $h = \alpha e_1 + h_1$, $h = -\alpha(-e_1) + h_1$. Satz 6.9 kann also als die natürliche Verallgemeinerung des Ambrosetti-Prodi Resultats auf höhere (gespaltene!) Eigenwerte betrachtet werden.

Literatur

- [1] Amann, H., Ambrosetti, A., Mancini, G.: Elliptic equations with noninvertible Fredholm linear part and bounded nonlinearities. Math. Zeitschrift 158, 179-194 (1978).
- [2] Ambrosetti, A., Prodi, G.: On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces. Ann. Mat. Pura Appl., Ser. IV, 93, 231-247 (1972).
- [3] Fučík, S.: Boundary value problems with jumping nonlinearities. Casopis Pest. Mat. 101, 69-87 (1976).
- [4] Hess, P.: On a nonlinear elliptic boundary value problem of the Ambrosetti-Prodi type. Boll. U.M.I. (erscheint demnächst).
- [5] Hess, P., Ruf, B.: On a superlinear elliptic boundary value problem. Math. Zeitschrift 164, 9-14 (1978).
- [6] Kazdan, T.L., Warner, F.W.: Remarks on some quasilinear elliptic equations. Comm. Pure Appl. Math. 28, 567-597 (1975).
- [7] Podolak, E.: On the range of operator equations with an asymptotically nonlinear term. Indiana University Math. Journ. 25, 1127-1137 (1976).

